УДК 621.394

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕДВОИЧНОГО КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ В ЦСП

Ю. В. Зеленевский, ст. научный сотрудник ВЧ 03425, к.т.н., kapitan_green@mail.ru
А. В. Зеленевский, ведущий специалист ЗАО «Фирма НТЦ «КАМИ»

Ключевые слова: *недвоичное кодирование, поле Галуа, основание модуляции, вероятность ошибки, энергетическая эффективность.*

Введение. Известно [1, 3], что в цифровых системах передачи (ЦСП) информационное сообщение передается по байтам (число информационных двоичных символов $K = 8$). Цель работы — обосновать выбор: параметров помехоустойчивого кода (n, k, $d_{\min}$), где n — длина кода, $k = 8$ — число информационных символов, $d_{\min}$ — минимальное кодовое расстояние; основания кода q в поле Галуа $GF(q)$. При определенном выборе энергия сигнала E_c на передачу $K = 8$ бит будет оставаться постоянной, а вероятность ошибки $P_{ош}$ при приеме байта достигнет минимального значения: $\min\limits_{n,q=\mathrm{var}} P_{ош}$ при $E_c = \mathrm{const}$, $K = 8 = \mathrm{const}$.

Будем считать, что на входе приемника действует аддитивная помеха типа флуктуационный шум и вероятность ошибки в приеме элемента кода

$$P_э(M) = f(h_0^2, M),$$

где $h_0^2 = \dfrac{E_э(M)}{N_ш}$;

$E_э(M)$ — энергия символа кода, зависящая от основания модуляции M; $N_ш$ — спектральная плотность помехи; приемник реализует некогерентный прием сигнала с частотной манипуляцией, при этом [2, 4]

$$P_э(M) = \sum_{i=1}^{M-1} (-1)^{i+1} C_{M-1}^{i} \frac{1}{i+1} \exp\left(-\frac{i}{i+1} h_0^2\right),$$

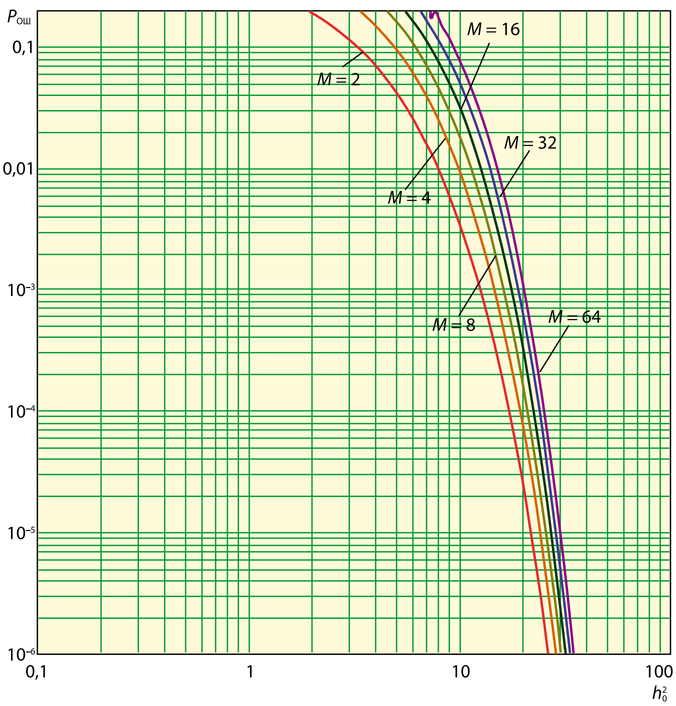

Рис. 1

где $C_{M-1}^{i} = \dfrac{(M-1)!}{i!(M-1-i)!}$.

Графики зависимости $P_э(M) = f(h_0^2, M)$ для такого приемника представлены на рис. 1.

Замечание 1. Вероятность $P_э(M)$ увеличивается с ростом основания модуляции M при фиксированных значениях $h_0^2 = \mathrm{const}$. Это значит, что выбор сигнала с частотной манипуляцией не будет влиять на корректность дальнейших рассуждений и полученных результатов.

Зададимся двоичным корректирующим кодом в поле GF (2) с параметрами (128, 8, 64). Такой код может быть получен в дискретном базисе Уолша-Адамара [1, 3]. Он удобен для решаемой задачи, поскольку обладает высокой корректирующей способностью, имеет $K = 8$ и позволяет производить преобразования для синтеза достаточного множества недвоичных кодов ($q \neq 2$) в поле $GF(q)$. Недостаток кода — высокая избыточность и, как следствие, большие затраты энергии при передаче.

Преобразование 1. Зададимся значением $q = 4$. В этом случае поле Галуа $GF(q = 4)$, а символы кода можно представить в виде $\{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$, где α — примитивный элемент поля Галуа. Так как $q = 2^m$, где m — число разрядов двоичного представления q-го символа, то при заданном $q = 4$ получим $m = 2$. Очевидно взаимно однозначное соответствие $0 \leftrightarrow 00$; $\alpha \leftrightarrow 01$; $\alpha^2 \leftrightarrow 11$. Тогда параметры недвоичного (q-го) кода (N, K, D) можно получить по формулам:

$$N = \frac{n}{m},\ K = \frac{k}{m},\ D = \frac{d_{\min}}{m},$$

что для $q = 4$ ($m = 2$) соответствует (64,4,32).

Замечание 2. Число кодовых комбинаций (M_K) для любого основания q кода определяется как q^K. Очевидно, при $q = 2$ для двоичного кода (128,8,64) значение $M_K = 2^8 = 256$; при $q = 4$ для кода (64,4,32) значение $M_K = 4^4 = 256$. Равенство M_K для $q = 2$ и 4 свидетельствует о корректности преобразования 1.

Преобразование 2. Значение $q = 16$, тогда GF ($q = 16$), символы кода $\{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^9, \alpha^{10}, \alpha^{11}, \alpha^{12}, \alpha^{13}, \alpha^{14}\}$, $m = \log_2 q = 4$ и соответственно: $\{0 \leftrightarrow 0000$; $1 \leftrightarrow 1000$; $\alpha \leftrightarrow 0100$, $\alpha^2 \leftrightarrow 0010$, ..., $\alpha^{14} \leftrightarrow 1111\}$; $N = 32$; $K = 2$; $D = 16$ и для $q = 16$ ($m = 4$) код (32,2,16); $M_K = 16^2 = 256$.

Преобразование 3. Путем укорочения двоичного кода (128,8,64) на два символа получим двоичный код (126,8,62) и осуществим его преобразование в недвоичный с $q = 64$ в поле GF (64) или с $q = 128$ в поле GF (128).

Символы кода $\{0,1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{61}, \alpha^{62}\}$, $m = \log_2 64 = 6$; $\{0 \leftrightarrow 000000$; ..., $\alpha^{62} \leftrightarrow 111111\}$, $N = 21$; K $= 8/6$; $D = 10$; $M_K = 64^{8/6} = 256$, $(21, \frac{8}{6}, 10)$.

Преобразование 4. Укоротим двоичный код (128,8,64) на три символа и получим двоичный код (125,8,61). Выберем $q = 32$ и в поле GF (32) получим символы кода $\{0, 1, \alpha, \alpha^2,$

..., α^{30}}, $m = \log_2 32 = 5$, тогда {$0 \leftrightarrow 00000$, ..., $\alpha^{30} \leftrightarrow 11111$}, $N = 25$; $K = 8/5$; $D = 12$; $M_K = 32^{8/5} = 256$, код $(25,\frac{8}{5},12)$.

Таким образом, исследуется группа блочных кодов: (128,8,64) с $q = 2$; (64,4,32) с $q = 4$; (32,2,16) с $q = 16$; $(21,\frac{8}{6},10)$ с $q = 64$; $(25,\frac{8}{5},12)$ с $q = 32$. Общим для них является то, что:

- все они переносят 8 бит информации;
- для передачи информации ($K = 8$) затрачивается одинаковая энергия E_c.

Утверждение 1. При $K = \text{const}$, $E_c = \text{const}$ существует q-й ($q \neq 2$) помехоустойчивый код с оптимальными параметрами N, K, D, при которых вероятность ошибочного декодирования минимальная ($P_{\text{ош min}}$).

Для доказательства утверждения 1 в канале передачи с независимыми ошибками расчет вероятности ошибочного декодирования кодовой комбинации будем производить по выражению [3]:

$$P_{\text{ош}} = 1 - \sum_{i=0}^{t_u} C_N^i P_э^i(M)[1 - P_э(M)]^{N-i},$$

где $t_u = \left[\frac{D-1}{2}\right]$ — число ошибок, исправляемых кодом;

[·] — минимальное целое число выражения.

Графики зависимостей $P_{\text{ош}} = f[P_э(M)]$ для вышеуказанной группы кодов представлены на рис. 2.

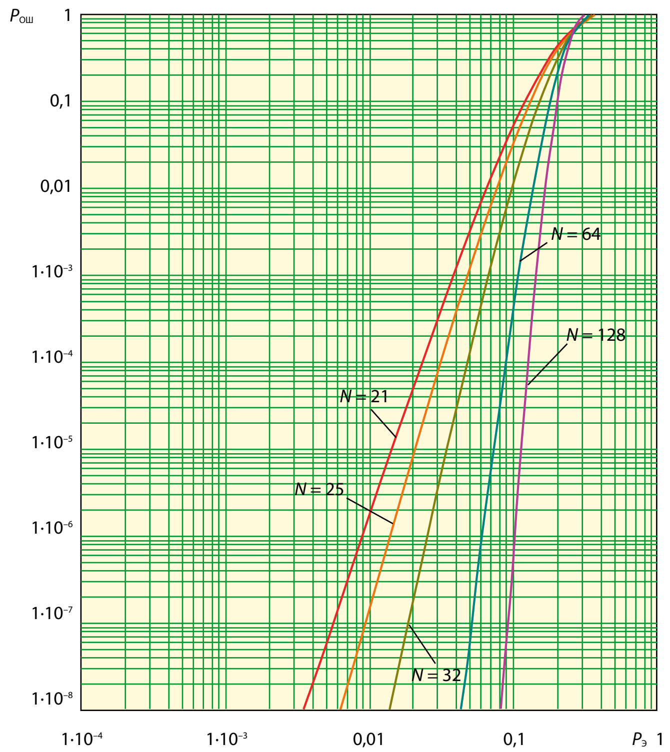

Рис. 2

Замечание 3. Двоичный код (128,8,64) позволяет получить наименьшее значение $P_{\text{ош}}$ при $P_э = \text{const}$ по сравнению с другими из группы исследуемых. Тем не менее, покажем, что можно более эффективно использовать затрачиваемую энергию.

Дальнейшие рассуждения будем обосновывать графико-аналитическим методом. Для этого зададим отношение сигнал/помеха h_0^2 ($M = 2$) на элемент двоичного кода (128,8,64), равным 2. По рис. 1 для $M = 2$ определяем значение $P_э$ ($M = 2$) $= 0{,}2$, а по рис. 2 для кода (128,8,64) получим соответствующее $P_э$ ($M = 2$) $= 0{,}2$ значение $P_{\text{ош}} = 0{,}1$. Аналогичную процедуру расчетов выполним для кода (64,4,32) с $q = 4$. В этом случае $h^2{}_0$ ($M = q = 4$) $= (\log_2 4)$ h_0^2 ($M = 2$) $= 4$.

Замечание 4. Увеличение основания кода q приводит к увеличению отношения h_0^2 ($M = q$) в $\log_2 q$ раз по сравнению с двоичным кодированием h_0^2 ($M = 2$), при этом $E_c = \text{const}$, $K = \text{const}$.

Продолжая рассуждения отметим, что при h_0^2 ($M = q = 4$) $=$ $= 4$ по рис. 1 для $M = 4$ получим $P_э$ ($M = 4$) $= 0{,}13$, а по рис. 2 для кода (64,4,32) будем иметь $P_{\text{ош}} = 6 \cdot 10^{-3}$.

Замечание 5. При $E_c = \text{const}$, $K = \text{const}$ переход к недвоичной сигнально-кодовой конструкции $M = q \neq 2$ приводит к уменьшению вероятности ошибочного декодирования $P_{\text{ош}}$.

Для подтверждения замечания 4 возьмем недвоичный код (32,2,16) с $q = 16$. Для него h_0^2 ($M = q = 16$) $= (\log_2 16)$ $h^2{}_0$ ($M = 2$) и при $h^2{}_0$ ($M = 2$) $= 2$ значение h_0^2 ($M = q = 16$) $= 8$. По рис. 1 получим $P_э$ ($M = 16$) $= 7 \cdot 10^{-2}$, а по рис. 2 — $P_{\text{ош}} = 2 \cdot 10^{-3}$.

Представленные рассуждения позволили найти ряд значений $P_{\text{ош}} = f(h_0^2, q)$ при $E_c = \text{const}$, $K = \text{const}$ для исследуемых кодов (см. таблицу).

Таблица

$N = 128$, $m = 1$	h_0^2	2 (E_{c1})	2,5 (E_{c2})	3 (E_{c3})
	$P_{\text{ош}}$	0,038	$9{,}89 \cdot 10^{-4}$	$8{,}93 \cdot 10^{-6}$
$N = 64$, $m = 2$	h_0^2	4 (E_{c1})	5 (E_{c2})	6 (E_{c3})
	$P_{\text{ош}}$	0,02	$2{,}047 \cdot 10^{-4}$	$7{,}109 \cdot 10^{-7}$
$N = 32$, $m = 4$	h_0^2	8 (E_{c1})	10 (E_{c2})	12 (E_{c3})
	$P_{\text{ош}}$	$1{,}623 \cdot 10^{-3}$	$4{,}714 \cdot 10^{-6}$	$6{,}048 \cdot 10^{-9}$
$N = 25$, $m = 5$	h_0^2	10 (E_{c1})	12,5 (E_{c2})	15 (E_{c3})
	$P_{\text{ош}}$	$1{,}196 \cdot 10^{-3}$	$3{,}825 \cdot 10^{-6}$	$6{,}254 \cdot 10^{-9}$
$N = 21$, $m = 6$	h_0^2	12 (E_{c1})	15 (E_{c2})	18 (E_{c3})
	$P_{\text{ош}}$	$6{,}566 \cdot 10^{-4}$	$1{,}611 \cdot 10^{-6}$	$2{,}396 \cdot 10^{-9}$

Заключение. Анализ значений функции $P_{\text{ош}} = f(h_0^2, q)$, представленных таблице, позволяет сделать следующие *выводы*.

При $P_{\text{ош}} = \text{const}$ (определяется требованиями технического задания) существует недвоичный код ($q \neq 2$) с параметрами (N, K, D), который требует минимального значения энергии E_c. Очевидно и обратное — при $E_c = \text{const}$ существует недвоичный код ($q \neq 2$) с параметрами (N, K, D), который обеспечивает минимальное значение вероятности ошибки декодирования кодовой комбинации с $K = \text{const}$. Этим доказана справедливость утверждения 1.

В зависимости от требований на вероятность $P_{\text{ош}}$ оптимальные параметры кодирования могут изменяться. Например, при $P_{\text{ош}} \leq 2 \cdot 10^{-5}$ оптимальный код (32, 2, 16) с $q = 16$, для $P_{\text{ош}} > 2 \cdot 10^{-5}$ оптимальный код $(21,\frac{8}{6},10)$ с $q = 64$.

ISSN 0013-5771. «ЭЛЕКТРОСВЯЗЬ», № 8, 2009

Двоичная система кодирования (128,8,64) имеет существенный энергетический проигрыш при тех же условиях передачи $E_c = \mathrm{const}$, $K = 8 = \mathrm{const}$. В частности, при E_{c1} применение оптимального кода $(21,\frac{8}{6},10)$ позволяет снизить вероятность $P_{ош}$ более чем на два порядка, при E_{c3} использование оптимального кода (32,2,16) снижает вероятность $P_{ош}$ более чем на три порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А.** Теория кодов, исправляющих ошибки/Пер. с англ. под ред. **Л.А. Бассалыго.** — М.: Связь, 1979. — 744 с.
2. **Стейн С., Джонс Дж.** Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений/Пер. с англ. под ред. **Л.М. Финка.** — М.: Связь, 1971. — 374 с.
3. **Зеленевский В.В.** Принципы построения робастных систем передачи информации. — Министерство обороны РФ, 2001. — 374 с.
4. **Зеленевский В.В.** Помехоустойчивость приема избыточных частотно-манипулированных сигналов на фоне гармонических помех//Радиотехника. — 2002. — № 7. — С. 32—36.

Получено 16.04.08