

УДК 621.391

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЕДОМЫЕ УСТРОЙСТВА СИНХРОНИЗАЦИИ С ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКОЙ ЧАСТОТЫ

**В. И. Борщ**, д. т. н., профессор

**В. В. Коваль**, зав. кафедрой информационных технологий и программирования НУБиП (Украина), д. т. н., профессор; synchrononet@gala.net

**Б. Я. Костик**, директор Дирекции первичной сети ОАО «Укртелеком» (Украина), д. т. н., профессор

**Г. А. Сукач**, профессор кафедры физики НУБиП (Украина)

**Ключевые слова:** сети синхронизации, фазовая автоподстройка частоты, фазовый детектор, синхронинформация.

**Введение.** Национальные сети синхронизации (НСС) реализуют процессы распределения времени и частоты по территориально распределенным объектам (в границах государств), обеспечивая их совместную работу и взаимодействуя с глобальными информационными инфраструктурами [1]. Синхронинформация требуется для таких важных и крупных систем, подсистем и их элементов, как оборонная отрасль, метрологические службы, железнодорожный и иной транспорт, нефтегазопроводы, энергосистемы и др.

В техническом плане НСС должна быть единой, выделенной и автономной (плезиохронной) [1—5]. С целью снижения материально-экономических затрат на источники первичной синхронинформации (ИПС)\* автономная НСС сменила свою архитектуру на иерархическую, в которой один или несколько ИПС принудительно распределяют синхронинформацию вертикально по уровням ее качества. С этой точки зрения все устройства синхронизации делятся на два вида: 1) ИПС с наиболее высокой стабильностью частоты тактовых синхросигналов, играющие роль ведущих тактовых генераторов (ВТГ)\*; 2) ведомые устройства синхронизации (ВУС)\*, или ВТГ с меньшей, чем у ИПС, стабильностью частоты тактовых синхросигналов, выступающие в роли ведомых тактовых генераторов (В<sub>д</sub>ТГ). Соединение ИПС с ВУС выполняется древовидным способом, который возможен только в иерархической архитектуре НСС. Управление распределением синхронинформации осуществляется по принципу сверху вниз, т. е. от ИПС к ВУС нижних уровней.

Согласно рекомендациям ITU-T и стандартам ETSI создана европейская иерархия генераторов НСС, состоящая из четырех уровней генераторов синхронизации: 1) один и более ИПС; 2) магистральные ВУС; 3) местные ВУС; 4) терминальные ВУС.

Ведомые устройства синхронизации строятся в основном с использованием систем фазовой автоподстройки частоты (СФАПЧ) и как объекты управления имеют свои специфические особенности:

- управляющее воздействие является периодической функцией фазовой координаты объекта (фазовой ошибки);
- фазовая плоскость объекта имеет бесконечное счетное множество состояний равновесия, устойчивых в первом приближении и чередующихся с неустойчивыми, и в этом случае разделяется на множество повторяющихся областей;
- периодические управляющие воздействия обуславливают возникновение периодических фазовых траекторий,

точки окончания которых образуют простую замкнутую кривую граничного цикла;

- управляющие воздействия, периодические в функции фазовой координаты, в статических режимах генерируют не свободные, а вынужденные колебания, представляющие собой периодическое движение с постоянными параметрами.

Ведомые устройства синхронизации должны принимать не менее двух внешних опорных сигналов, выделяя лучший по качественным показателям; выполнять фильтрацию выбранного синхросигнала и его обработку (подавление фазового дрожания, дрейфа фазы и т. д.); обеспечивать распределение синхронинформации по узлам объектов синхронизации и возможность работы с «запомненным» значением частоты опорного сигнала при ухудшении качества синхронизирующего сигнала ниже нормы на всех входах (удержание частоты тактового синхросигнала в режиме holdover).

Международные требования к рабочим характеристикам ВУС определяются соответствующими рекомендациями и стандартами [2, 3]. Одно из таких требований — оптимальное по быстродействию вхождение в синхронизм, что можно обеспечить минимальной длительностью режимов переходных процессов, их точностью и стабильностью.

Объектом нашего исследования являются ВУС информационных сетей с фазовой автоподстройкой частоты, целью исследования — теоретическое обоснование и практическая реализация оптимальных по быстродействию периодических управлений ВУС с СФАПЧ.

**Постановка задачи.** Пусть поведение объекта управления описывается системой уравнений вида [4]:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{1}{K(t)} = k_1 u_{\text{ФД}}[\varphi(t)]; \\ u_{\text{ФД}}[\varphi(t)] = U_{\text{ФД}} F[\varphi(t)]; \\ u_{\text{ФД}}(0) = u_{\text{ФД}}[T(t)]; \\ u_{\text{ФД}}(\varphi) = u_{\text{ФД}}(\varphi + T_\varphi), T_\varphi = 2\pi; \\ u_{\text{ФДст}}(t) = u_{\text{ФД}}(\varphi); u_{\text{ФДдин}}(t) = F_{\text{дин}}[u_{\text{ФД}}(t), u_{\text{ФД}}(\varphi)], \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi(t) = \varphi_{\text{ВТГ}}(t) - \varphi_{\text{ВдТГ}}(t)$  — фазовая ошибка объекта управления;  $\varphi_{\text{ВТГ}}(t)$  и  $\varphi_{\text{ВдТГ}}(t)$  — соответственно фазы ведущего (ВТГ) и ведомого (В<sub>д</sub>ТГ) тактовых генераторов;  $K(t)$  — коэффициент передачи фильтра нижних частот;  $k_1$  — постоянный коэффициент;  $u_{\text{ФД}}[\varphi(t)]$  — напряжение на выходе фазового детектора (ФД);  $F[\varphi(t)]$  — нормированная характеристика ФД;  $U_{\text{ФД}}$  — амплитуда  $u_{\text{ФД}}(\varphi)$ ;  $T(t)$  — подлежащий поиску неизвестный интервал времени;  $T(\varphi)$  — период  $F[\varphi(t)]$ ;  $u_{\text{ФДст}}(t)$  — периодическое с периодом  $T_\varphi = 2\pi$  напряжение на выходе ФД в статическом режиме работы;  $u_{\text{ФДдин}}(t)$  — кусочно-постоянное или кусочно-периодическое напряжение на выходе ФД в динамическом режиме работы.

\* В РФ и СНГ на уровне стандартов вместо ИПС используется ПЭГ (первичный эталонный генератор); вместо ВТГ — ВЗГ (вторичный задающий генератор); вместо ВУС — МЗГ (местный задающий генератор).

Для заданного начального состояния объекта  $\Phi_0$  (1) из возможных  $\Phi = \{\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{n-1}(t)\}$  и периодического управляющего воздействия  $u_{\text{ФД}}[\varphi(t)]$  из класса допустимых  $u_{\text{ФД}}[\varphi(t)] \in U(\Phi) \in E^m$  нужно найти такое оптимальное управление  $u_{\text{опт}}(t)$  и заранее неизвестный оптимальный интервал длительности  $T_{\text{опт}}(t)$  из класса допустимых  $T(t) \in T(\Phi) \in E^S$  при  $u_{\text{ФД}}[\varphi(t)] = \text{var}, T(t) = \text{var}$  в одном случае и такое оптимальное управление  $u_{\text{опт}}(t)$  при заданном периоде  $T_\varphi, u_{\text{ФД}}[\varphi(t)] = \text{var}, T_\varphi = \text{const}$  — в другом, что позволило бы достичь минимального критерия качества:

$$J\{u(t), T(t)\} = \int_{T_0}^{T_{\text{зк}}} 1 \cdot dt \Rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $T_0$  — время начала движения изображающей точки из состояния  $\Phi_0$ ;  $T_{\text{зк}}$  — время конца движения изображающей точки на замкнутой кривой граничного цикла.

Таким образом, рассматривается классическая постановка задачи на быстродействие перехода изображающей точки (ИТ) из одного (начального) многообразия фазового пространства  $\Phi_0$  в конечное многообразие  $\Phi_k$  за минимальную длительность движения с учетом вышеприведенных специфических особенностей объекта управления ВУС с фазовой автоподстройкой частоты.

Обобщенная математическая модель СФАПЧ ВУС телекоммуникационных сетей (ТКС) представлена в виде неоднородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1). При наличии в ВУС нелинейных элементов это дифференциальное уравнение также будет нелинейным. Управляемой величиной объекта управления является фазовая ошибка, определяемая как разность между фазой одного из нескольких опорных тактовых синхросигналов, получаемых из линии связи от ВТГ (выбором лучшего качества), и фазой тактового синхросигнала, генерируемого ВД ТГ.

Управляющее воздействие формируется субъектом управления ВУС ТКС. Фазовый детектор ВУС преобразует фазовую ошибку в напряжение на ее выходе. Это преобразование является нелинейным, и мгновенное напряжение на выходе ФД определяется его дискриминационной характеристикой, имеющей периодический характер в функции фазовой ошибки ВУС ТКС с периодом  $T_\varphi = 2\pi$ . Управление ВУС ТКС характеризуется точками  $u$  некоторой области допустимых управлений  $U$ , которая в конкретном случае может быть любым множеством некоторого  $m$ -мерного евклидова пространства  $E^m$ .

**Решение задачи.** Теоретическое решение проблемы управления в оптимальных по быстродействию ВУС ТКС с фазовой автоподстройкой частоты изложено в [6—11].

**Теорема 1.** Пусть задан колебательный объект управления и существует оптимальное управление, которое переводит изображающую точку из любого начального положения в точку замкнутой кривой граничного цикла (ЗКГЦ) или в точку области притяжения. В этом случае оптимальное по быстродействию управление объектом будет представлять собой периодическую функцию времени, принимая по очереди максимально допустимые значения  $u'(t) = \pm 1$  или  $u''(t) = \mp 1$  на этой половине интервала  $] + \infty$ , точка ЗКГЦ].

**Следствие 1.** Дискриминационная характеристика ФД в случае ограничения управляющего возмущения только на величину амплитуды должна быть знакопеременной периодической и иметь прямоугольную форму.

**Следствие 2.** Число переключений оптимального по быстродействию управления от начала движения изобража-

ющей точки к точке ЗКГЦ может быть бесконечным, т. е. на открытом интервале времени [начало движения ИТ,  $+\infty$  [ верхняя граница числа переключений управляющего возмущения отсутствует, однако в каждом конкретном случае число переключений является счетным множеством и зависит от начальных координат ИТ.

**Следствие 3.** Оптимальное по быстродействию управление колебательным объектом может оставаться постоянным со значениями  $+1$  или  $-1$  максимум на полупериоде  $\pi$ .

**Теорема 2.** Если оптимальное по быстродействию периодическое управление по фазовой координате системы колебательным объектом существует, то оно единственное.

Для анализа оптимальных по быстродействию режимов переходных процессов ВУС ТКС на основе принципа максимума аналитическими методами следует найти выражения для расчета всех показателей их качества и построить кривую управления фазовых траекторий в функции времени.

Поиск оптимальных по быстродействию управлений сводится к решению неоднородных дифференциальных уравнений математической модели ВУС ТКС при произвольных начальных условиях с учетом оптимального периодического закона управляющего воздействия  $u(t) = \text{sign} \sin \omega t$ . Оптимальный характер переходного процесса представляется в виде параметрических уравнений по интервалам оптимального управляющего воздействия, так как это решение справедливо для всех интервалов оптимального движения во времени. Длительность интервалов оптимальных режимов переходных процессов находится из оптимальных решений путем определения моментов начала и окончания таких интервалов. При этом рассчитываются координаты всех точек переключения управляющего воздействия и по результатам определяется кривая управления фазовых траекторий в функции времени.

**Графические и графоаналитические методы.** Аналитические методы исследования переходных процессов могут быть весьма сложными, требуют много времени и не всегда позволяют решить задачу. В таких случаях целесообразно использовать графические и графоаналитические методы.

Предложен алгоритм определения характера режимов оптимальных по быстродействию переходных процессов ВУС ТКС с колебательными объектами управления методом «веера секущих». Также предложен графоаналитический метод и алгоритм его реализации, базирующийся на использовании приближенного решения уравнений в конечных разностях, метода «веера секущих», принципа максимума и метода фазовой плоскости в совокупности с методом «обратного движения» [6—11].

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального по быстродействию управления периодическими по фазовой координате управляющими воздействиями объекта с колебательными статическими режимами работы:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f\{\varphi(t), u[\varphi(t)]\}; \\ u[\varphi(t)] = u\{F[\varphi(t)] + 0\} = u\{F[\varphi(t)] + T_\varphi\}; \\ u \in U_{\text{дон}}[\varphi(t)] \subset E^m; \\ J\{u[\varphi(t)], T_\varphi\} = \int 1 \cdot dt \Rightarrow \min, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ,  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  — соответственно векторы состояния (фазовые координаты объекта) и управления (управляющего воздействия);  $F[\varphi(t)]$  — функциональная характеристика, например дискриминационная харак-

теристика ФД;  $T_\varphi$  — период управляющего возмущения  $u$  [ $\varphi(t)$ ];  $U_{\text{доп}}$  — компактное множество допустимых управлений;  $E^n$  — евклидово пространство;  $\mathcal{Q}$  — критерий качества.

Решение задачи имеет свою специфику.

1. В математической теории оптимальных по быстродействию управлений линейными объектами по принципу разгон–торможение допустимыми управлениями являются кусочно-непрерывные функции  $u(t)$ , значения которых находятся в замкнутой области  $U$ . В рассматриваемой задаче:

- оптимизация происходит фактически по двум параметрам:  $u(t) = \text{var}$  и  $T_\varphi = \text{var}$ ;

- в динамике координаты вектор-функции управления  $u(t)$  при их кусочно-непрерывном ограничении будут: а) кусочно-непрерывными функциями, что сближает их с управлением линейными объектами. При этом период  $T_\varphi$  становится постоянным в пределах интервала оптимального движения и равен его длительности; б) кусочная-постоянность управления определяет лишь длительность интервала оптимального движения, а внутри этого интервала управляющее воздействие изменяется периодически с периодом  $T_\varphi$ ;

- в статике управляющее воздействие изменяется периодически по своему закону с постоянными параметрами (амплитудой, частотой, фазой).

2. В математической теории оптимальных по быстродействию управлений непрерывными периодическими процессами фазовые траектории периодичны в силу изолированного решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, u); \\ \varphi(0) = \varphi(T) \end{cases}$$

и могут быть реализованы с помощью допустимого управления  $u_g(t)$ ,  $g = 1, m$ , полученного сдвигом интервалов управления соответствующих движению по оптимальной кривой (приспосовыванием друг к другу кривых оптимального движения изображающей точки по интервалам управляющих воздействий).

В рассматриваемой задаче ситуация иная. Фазовые траектории системы уравнений (3) становятся периодическими в силу периодичности ее решения за счет периодичности управляющих воздействий  $u\{F[\varphi(t)]\}$ . При этом следует учитывать упомянутую выше специфику. В (3) при существовании допустимого управления соответствующая фазовая траектория заканчивается на единственной простой замкнутой кривой. При наличии оптимального по быстродействию управления объектами (3) все предельные циклы являются оптимальными, а неоптимальным управлениям (если таковые присутствуют) отвечают неоптимальные предельные циклы.

Предположим, что решение рассматриваемой задачи существует. Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *В задаче (3) управление периодическим управляющим воздействием объектом с колебательным статическим режимом работы осуществляется так, что соответствующая ему допустимая фазовая траектория заканчивается на единственной замкнутой кривой предельного цикла.*

*Доказательство теоремы.* Пусть управление объектом (3) происходит с помощью периодического управляющего воздействия  $u\{F[\varphi(t) + 0]\} = u\{F[\varphi(t) + T_\varphi]\}$ , что в свою очередь вызывает периодичность решения первого уравнения системы (1). В силу указанных периодичностей соответ-

ствующая фазовая траектория, как известно, представляет собой простую замкнутую кривую. Например, гармоническим колебаниям отвечает простая замкнутая кривая — эллипс. Размеры и тип замкнутой кривой данного объекта (3) обусловлены в первую очередь параметрами управляющего воздействия, включая энергоресурсы; во вторую — параметрами объекта управления, включая начальные условия движения изображающей точки. Причем начальные условия влияют лишь на координаты точки окончания переходного процесса.

В статике осуществляется режим движения: вынужденные колебания, возникшие под влиянием управляющего воздействия, представляют собой периодическое движение с постоянным и заданным периодом (частотой), фазой и амплитудой. Не ограничивая общности, период можно считать равным  $2\pi$ , что соответствует большинству дискриминационных характеристик ФД систем с фазовой автоподстройкой частоты  $F[\varphi(t)]$  (гармонических, треугольных, трапециевидных, прямоугольных).

Таким образом, параметры управляющего воздействия данного объекта однозначно определяют тип и размер замкнутой кривой управления, на которой заканчиваются (оконечные точки) фазовые траектории рассматриваемого режима переходных процессов при различных начальных условиях. Совокупность указанных точек и образует замкнутую кривую. Множество точек окончания режимов переходных процессов в некоторой заданной области фазового пространства называется предельным циклом периодического решения первого уравнения системы (3). Замкнутая кривая предельного цикла (изолированное периодическое решение первого уравнения второго порядка ( $n = 2$ ) системы (3)) [10] разбивает фазовую плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю, а так как траектории, определяемые этим решением, не пересекаются, то каждая отличная от замкнутой кривой траектория является по отношению к ней внутренней или внешней.

Доказано [12], что и для внешних, и для внутренних траекторий имеются две взаимоисключающие линии поведения вблизи замкнутой кривой предельного цикла: 1) все траектории, начинающиеся внутри кривой, при  $t \rightarrow +\infty$  наматываются на нее как спирали; 2) то же имеет место и для внешних траекторий. Если все траектории (внутренние и внешние), начинающиеся вблизи замкнутой кривой предельного цикла, наматываются на нее при  $t \rightarrow +\infty$ , то предельный цикл принято считать устойчивым.

Все фазовые траектории, заканчивающиеся точкой на замкнутой кривой предельного цикла, входят в вынужденный колебательный статический режим работы в фазе, а внутренние и внешние траектории, заканчивающиеся вблизи замкнутой траектории, постепенно втягиваются в фазу вынужденных колебаний статики. Фазовые траектории, не попавшие на замкнутую кривую или в область близости к ней, не могут быть втянуты в статику, т. е. вынужденный колебательный режим работы для них невозможен, что противоречит условию задачи. А поскольку замкнутая кривая предельного цикла определяется для конкретного объекта (3) заданными параметрами периодического управляющего воздействия, то она является единственной. Для другого объекта и/или других параметров управляющего воздействия замкнутая кривая предельного цикла при наличии управления будет иной.

Таким образом, для любого наперед заданного допустимого управления  $u\{F[\varphi(t) + 0]\} = u\{F[\varphi(t) + T_\varphi]\}$  может быть построена фазовая траектория по решению первого уравнения системы (3), представляющая собой совокупность

по интервалам движения приспособленных траекторий, заканчивающихся на единственной простой замкнутой кривой предельного цикла. Этот вывод вместе с предположением о существовании допустимого управления объектом (3) и есть доказательство теоремы.

**Теорема 2.** При существовании оптимального по быстродействию управления объектами (3) все предельные циклы являются оптимальными, а неоптимальным управлениям, в случае их существования, отвечают неоптимальные предельные циклы.

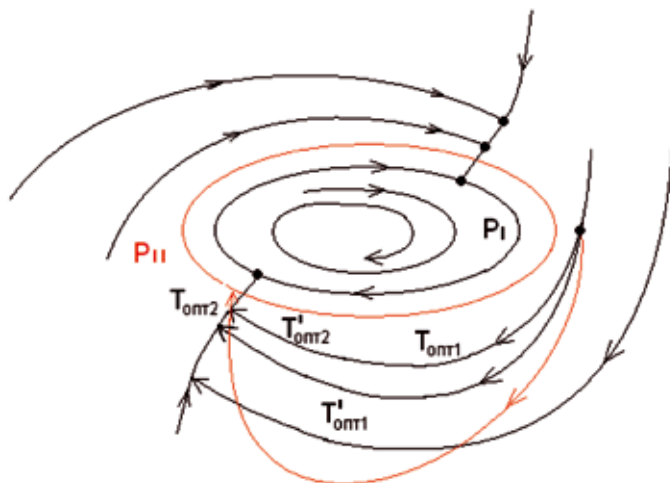
*Доказательство теоремы.* Допустим, что помимо оптимального управления существует и неоптимальное, например кусочно-постоянное, управление.

Пусть также  $P = \Phi(t)$  — оптимальный предельный цикл физического объекта, поведение которого описывается уравнением (1), т. е. множеством конечных точек фазовых траекторий, определяемых решением системы уравнений (3) при оптимальном по быстродействию управлении в некоторой заданной области фазового пространства. Следовательно, оптимальный предельный цикл — это множество точек окончания оптимальных по быстродействию режимов переходных процессов, для которых выполняется условие минимизации функционала  $\int 1 \cdot dt \rightarrow \min$ . Совокупность этих точек и образует замкнутую кривую предельного цикла.

Также будем предполагать, что начальное состояние  $\Phi_0$  одинаково для оптимального и неоптимального управления и последнее осуществляется за два интервала движения изображающей точки (не ограничивая общности).

Для условий, показанных на рисунке, приведено отображение движения изображающей точки в фазовом пространстве системы. Уравнения фазовых траекторий или их проекций на плоскости фазового пространства системы будут определяться решением системы уравнений (3). На рисунке таковыми являются два участка логарифмических спиралей, приспособленных друг к другу в соответствии с двумя интервалами управления.

Пусть конечную точку оптимального переходного процесса  $\Phi_k$  (точку на замкнутой кривой оптимального предельного цикла) изображающая точка достигнет при условии  $T_{\text{опт}} < T_{\text{нопт}}$ , что противоречит единственности и достаточности оптимального управления [13], которому должно соответствовать наименьшее значение функционала  $J_{\text{опт}} < J_{\text{нопт}}$ , а следовательно, неоптимальному управлению должна соответствовать замкнутая кривая предельного цикла большего размера (на рисунке отмечена красным). Этот вывод вместе с предположением о существовании



оптимального управления из компактного множества допустимых и есть доказательство теоремы.

**Заключение.** Созданные на основе теоретических исследований оптимальные по быстродействию ведомые устройства синхронизации с фазовой автоподстройкой частоты выпускаются серийно. Они отвечают требованиям рекомендаций ИТУ-Т и стандартов ETSI [2, 3]. Оригинальность устройств защищена патентами Российской Федерации и Украины.

Разработанные ВУС ТКС прошли лабораторные, натурные экспериментальные исследования, сертификацию и эксплуатируются на первичной телекоммуникационной сети Украины [14].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борщ В.И., Карлаш С.Д., Коваль В.В., Коршун С.И., Костік Б.Я., Туманов Ю.Г. Проблеми побудови єдиної національної мережі синхронізації України//Зв'язок.— 2004.— № 6 (50).— С. 15—19.
2. ITU-T Rec. G.812 Timing Requirements of Slave Clocks suitable for use as Node Clocks in Synchronization Networks. Geneva, June, 1998.
3. ETS EN 300 462-4-1: Transmission and Multiplexing (TM); Generic requirement for synchronization networks; Part 4—1: Timing characteristics of slave clocks suitable for synchronization supply to Synchronous Digital Hierarchy (SDH) Plesiochronous Digital Hierarchy (PDH) equipment.
4. Борщ В.И., Гайдар В.П., Коваль В.В., Лесовой И.П. Тактовая синхронизация в интегральных цифровых сетях электросвязи.— К.: Наукова думка, 1998.— 202 с.
5. Борщ В.И., Коваль В.В., Костік Б.Я., Михайлов М.К. Проблеми побудови мережі синхронізації інформатизаційних інфраструктур на національному, європейському і глобальному рівнях/Праці УНДІРТ.— 2003.— № 4 (36).— С. 24—30.
6. Борщ В.И., Донец В.А., Коваль В.В., Лейбзон А.Я., Лесовой И.П. Оптимизация структур больших систем.— К.: Наукова думка, 2000.— 191 с.
7. Борщ В.И., Коваль В.В., Костик Б.Я. Анализ характера переходных процессов в системах с колебательным объектом управления методом «веера секущих»/Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій.— 2003.— Т. 1.— № 1.— С. 23—26.
8. Борщ В.И., Коваль В.В., Костик Б.Я. Колебания в оптимальных по быстродействию системах радиоавтоматики/Радиотехника.— 2002.— Вып. 128.— С. 219—225.
9. Борщ В.И., Коваль В.В., Костик Б.Я. Особенности решения задачи оптимального по быстродействию управления объектами со статическими режимами работы/Праці УНДІРТ.— 2003.— № 2 (34).— С. 114—116.
10. Борщ В.И., Коваль В.В., Нетудихата Л.И. Оптимальные за швидкодією управління об'єктами з двома сталими часу/Радиотехника.— 2003.— Вып. 136.— С. 109—113.
11. Борщ В.И., Коваль В.В., Туманов Ю.Г., Коршун Е.И. Замкнутые кривые предельных циклов оптимальных по быстродействию объектов с периодическим по фазовой координате управляющим воздействием//Радиотехника.— 2005.— Вып. 142.— С. 73—79.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: МГУ, 1961.— 312 с.
13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1969.— 384 с.
14. Борщ В.И., Костік Б.Я., Коваль В.В., Дробик О.В. Натурні вимірювання та статистична обробка характеристик сигналів мережної синхронізації телекомунікацій//Електроніка і зв'язь.— 2007.— Ч. 3.— С. 106—110.