

СПЕКТРАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНДЛИ ДЛЯ УЗЛА МУЛЬТИСЕРВИСНОЙ СЕТИ ПРИ ОБСЛУЖИВАНИИ МУЛЬТИМЕДИЙНОГО ТРАФИКА

М. С. Самойлов, ведущий инженер-конструктор ОАО «Концерн «Автоматика»; samoilovms@mail.ru

Статистические исследования подтверждают самоподобную природу мультимедийного трафика. Вследствие этого корректной моделью теории массового обслуживания, описывающей узлы мультисервисной сети, будет модель типа G/G/1 или G/G/n. Одним из способов представления узла мультисервисной сети при его исследовании как системы массового обслуживания является нахождение распределения времени ожидания и среднего времени ожидания пакетов мультимедийного трафика в очереди с помощью решения интегрального уравнения Линдли.

Ключевые слова: мультимедийный трафик, аппроксимация, система массового обслуживания, интегральное уравнение Линдли.

Введение. Статистические исследования инфокоммуникационных сетей показывают, что классический подход к анализу узлов мультисервисной сети (МСС) как систем массового обслуживания (СМО) типа M/M/1 и M/M/n [1, 2], используемый при анализе телефонных сетей, искажает реальную картину функционирования современных МСС. Непуассоновский характер распределения случайных величин приводит к модели обслуживания трафика типа G/G/1 и G/G/n, аналитическое исследование которой связано с решением интегрального уравнения Линдли (ИУ Линдли) [1–3].

Статистические исследования, приведенные в [4], подтверждают, что видеотрафик IPTV является самоподобным, поэтому в первом приближении узлы его обработки можно описывать моделями теории массового обслуживания типа G/G/1 или G/G/n [5–7].

Аппроксимации функций плотности вероятностей. Полученные в [4] распределения интервалов времени между пакетами и интервалов времени обслуживания отличаются от экспоненциальных, поэтому их использование для

решения ИУ Линдли спектральным методом весьма проблематично [1]. В качестве исходных данных при спектральном решении ИУ Линдли целесообразно получить функции распределения интервалов времени между пакетами и интервалов времени обслуживания, аппроксимированные суммой затухающих экспонент.

Рассмотрим общий случай обслуживания реального мультимедийного трафика в СМО. Для этого воспользуемся следующими аппроксимирующими выражениями плотностей вероятностей интервалов времени между пакетами $a(\tau)$ и времени обслуживания $b(\xi)$ [8]:

$$a(\tau) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\alpha_k \tau}; \quad (1)$$

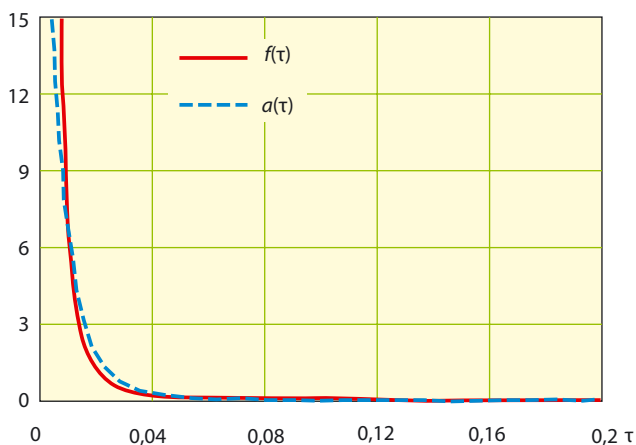
$$b(\xi) = \sum_{k=1}^l b_k e^{-\beta_k \xi}. \quad (2)$$

На рис. 1, а представлена аппроксимация выражением (1), согласно алгоритму [8], плотности вероятности интервалов времени между пакетами при $a_k, \alpha_k, k = 1, \dots, n, n = 5$ для распределения Коши:

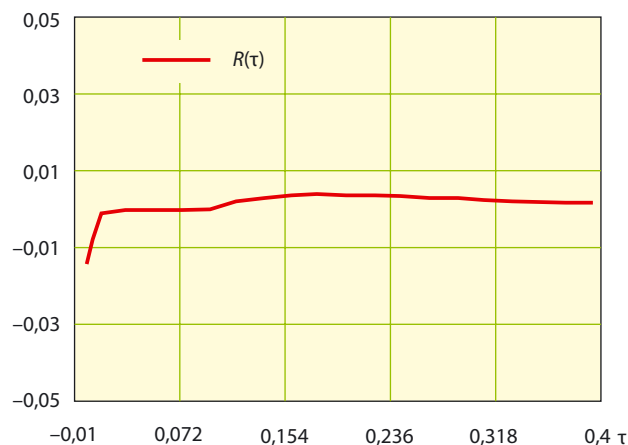
$$f(\tau) = \left[\pi \sigma \left(1 + \left(\frac{\tau - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) \right]^{-1},$$

где $\sigma = 0,00108$; $\mu = 0,00329$.

Аналогично на рис. 2, а показаны результаты аппроксимации интервалов времени обслуживания выражением (2) при $b_k, \beta_k, k = 1, \dots, l, l = 5$ для обобщенного распределения Парето:



а)



б)

Рис. 1. Плотность вероятности интервалов времени между пакетами (сплошная линия — исходная, пунктир — экспоненциальная) (а) и погрешности вычисления $R(\tau)$ (б)

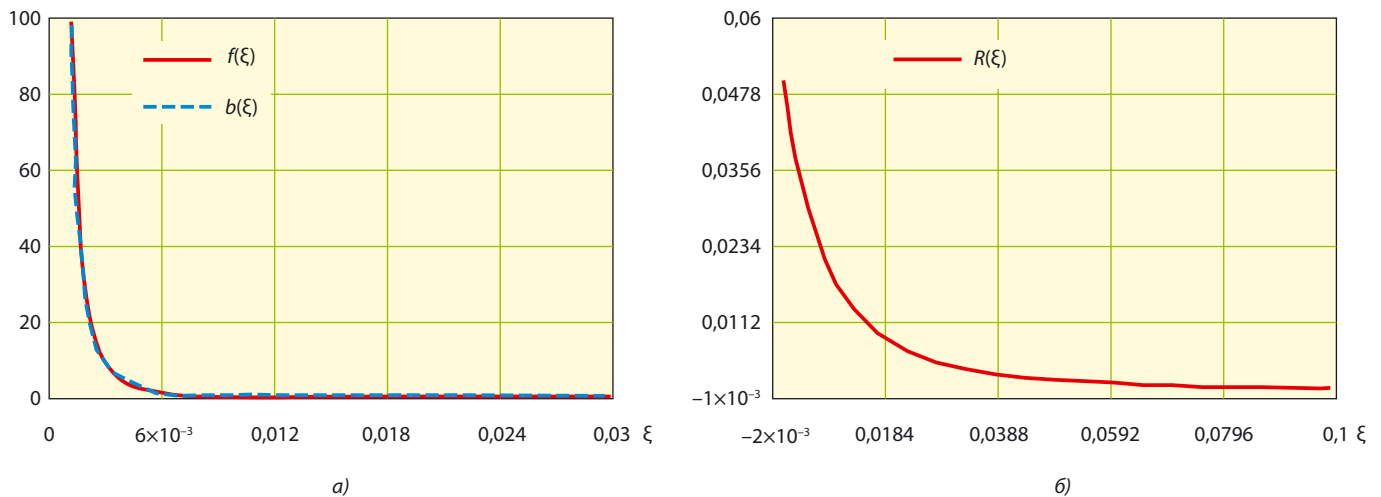


Рис. 2. Плотность вероятности интервалов времени обслуживания (а) и погрешности вычисления $R(\xi)$ (б)

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + k \frac{(\xi - \mu)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}}, & k \neq 0; \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi - \mu)}{\sigma}\right), & k = 0, \end{cases}$$

где $k = 0,56357$; $\sigma = 1,7029 \cdot 10^{-4}$; $\mu = 1,8848 \cdot 10^{-4}$.

Графики абсолютной погрешности аппроксимации $R(\tau)$ и $R(\xi)$ приведены на рис. 1, б и 2, б. Дальнейшие исследования показывают, что значения погрешности $R(\tau)$ и $R(\xi)$ можно считать приемлемыми при использовании рассматриваемых аппроксимаций в спектральном методе решения ИУ Линдли.

Спектральное решение ИУ Линдли. Для корректного решения ИУ Линдли применительно к реальному мультимедийному трафику необходимо учитывать некоторые особенности распределения времени обслуживания. Очевидно, что длины пакетов трафика конечны, хотя, согласно [9], длина пакета может превышать 65000 байт. На практике редко встречаются пакеты длиной более 1500 байт, поэтому в случае видеотрафика IPTV, зафиксированного на входе ресивера IPTV, среднюю длину «большого» пакета можно принять равной 1350 байт и, следовательно, считать время обслуживания «большого» пакета конечным. В [4] показано, что распределение времени обслуживания имеет бимодальный характер, одна из мод которого приходится на среднее значение времени обслуживания «большого» пакета.

С учетом сказанного сформулируем методику решения ИУ:

1. Для записи бимодального распределения времени обслуживания используем форму распределения смеси:

$$b(\xi) = P_1 b_1(\xi) + P_2 b_2(\xi), \tag{3}$$

где $b_1(\xi)$ и $b_2(\xi)$ — распределение времени обслуживания пакетов соответственно «малой» и «большой» длины; P_1 и P_2 — вероятности использования распределений $b_1(\xi)$ и $b_2(\xi)$.

Подставляя в (3) вместо $b_1(\xi)$ выражение (2) и вместо $b_2(\xi)$ — дельта-функцию, получаем

$$b(\xi) = P_1 \sum_{k=1}^n b_k e^{-\beta_k \xi} + P_2 \delta(\xi - \xi_2). \tag{4}$$

2. Определим преобразование Лапласа для $a(\tau)$

$$A^*(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\alpha_k - s} \tag{5}$$

и для распределения $b(\xi)$, выраженного в форме (4):

$$B^*(s) = P_1 \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{s + \beta_k} + P_2 e^{-s \xi_2}. \tag{6}$$

При исследовании бимодальных распределений плотностей вероятности второй пик $b_2(\xi)$ также можно было бы аппроксимировать суммой затухающих экспонент, что привело бы к необходимости существенного увеличения числа членов ряда в выражении (2) и повлекло за собой серьезное усложнение последующих вычислений.

3. Запишем спектральное разложение $A^*(-s)B^*(s) - 1$, необходимое для решения ИУ Линдли спектральным методом в новой форме, соответствующей бимодальному распределению реального мультимедийного трафика. Воспользовавшись выражениями (5) и (6), получим

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \left[\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\alpha_k - s} \right] \left[P_1 \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{s + \beta_k} + P_2 e^{-s \xi_2} \right] - 1. \tag{7}$$

Следуя классической методике расчета [1], рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решая задачу аппроксимации распределения Коши и обобщенного распределения Парето суммой затухающих экспонент аналогично тому, как это сделано в [8], можно получить:

для распределения Коши $n = 5$, $a_1 = 0,5240$, $a_2 = -3,3552$, $a_3 = 22,2058$, $a_4 = -58,6077$, $a_5 = 65,4504$, $\alpha_k = \frac{k}{m}$, $m = 0,044$;

для обобщенного распределения Парето $l = 5$, $b_1 = 146,141$, $b_2 = -128,141$, $b_3 = 9,133 \cdot 10^3$, $b_4 = -2,197 \cdot 10^3$, $b_5 = 2,18 \cdot 10^3$, $\beta_k = \frac{k}{m}$, $m = 0,013$.

Данная ситуация характеризует низкоскоростные порты устройств в сети передачи данных. При выбранных распределениях и их параметрах коэффициент загрузки $\rho = \frac{\xi_{\text{ср.IPTV}}}{\tau_{\text{ср.IPTV}}}$ определяется значением $\rho \approx 0,86$.

Далее, согласно [1], необходимо выполнить спектральное разложение

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}$$

и найти нули и полюса функций $\Psi_+(s)$ и $\Psi_-(s)$, удовлетворяющие условиям:

- функция $\Psi_+(s)$ является аналитической без нулей в полуплоскости $\text{Re}(s) > 0$, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_+(s)}{s} = 1$;
- функция $\Psi_-(s)$ является аналитической без нулей в полуплоскости $\text{Re}(s) < D$, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_-(s)}{s} = -1$.

Пошагово выполняя алгоритм [1], вычисляем функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\Psi_+(s)},$$

где постоянная $K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s}$.

При введенных обозначениях преобразование Лапласа плотности вероятностей времени ожидания пакета в очереди для системы G/G/1 имеет вид

$$W^*(s) = s\Phi_+(s).$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа функции $W^*(s)$ и интегрируя полученную плотность вероятностей, определяем интегральную функцию распределения времени ожидания $W(y)$ (рис. 3):

$$W(y) = 1 + p_1 \cos(x_1 y) e^{-z_1 y} + p_2 e^{-z_2 y} + p_3 e^{-z_3 y} + p_4 \sin(x_4 y) e^{-z_4 y},$$

где $p_1 = 13,0077$; $p_2 = -13,5565$; $p_3 = -0,4088$; $p_4 = 907,2289$; $x_1 = x_4 = 1,61$; $z_1 = z_4 = 968$; $z_2 = 829$; $z_3 = 766$.

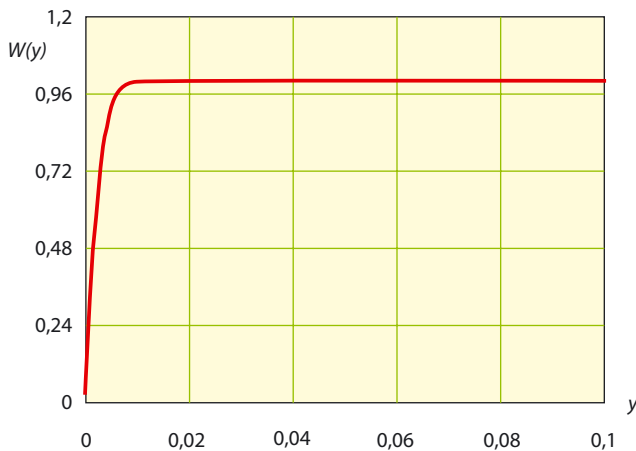


Рис. 3. Интегральная функция распределения времени ожидания $W(y)$

Вероятность того, что поступающее требование застанет систему свободной, равна $W(0) = 0,042$. Имея функцию $W^*(s)$, определяем среднее время ожидания пакета в очереди из известного свойства характеристической функции:

$$T = \left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0}. \tag{8}$$

По формуле (8) находим значение среднего времени ожидания пакета в очереди $T = 2,192 \cdot 10^{-3}$ (условных еди-

ниц времени). Напомним, что данные результаты характеризуют систему G/G/1 при бимодальном распределении времени обслуживания с ограниченной областью определения функции.

Пример 2. Посмотрим, каким образом преобладание «больших» пакетов в смеси (88%) влияет на среднее время ожидания пакета в очереди T и вероятность того, что поступающее требование застанет систему свободной, т.е. $W(0)$. Исключим из распределения (3) плотность $b_2(\xi)$. Проводя такие же, как в примере 1, вычисления, получим выражение для распределения времени ожидания $W(y)$:

$$W(y) = 1 + p_1 e^{-z_1 y} + p_2 e^{-z_2 y} + p_3 e^{-z_3 y} + p_4 e^{-z_4 y} + p_5 e^{-z_5 y},$$

где $p_1 = 0,00867$; $p_2 = -0,00389$; $p_3 = 0,0402$; $p_4 = -0,03035$; $p_5 = -0,0230$; $z_1 = 1551$; $z_2 = 766$; $z_3 = 3192$; $z_4 = 3748$; $z_5 = 2252$.

На рис. 4 приведен график $W(y)$ без учета «больших» пакетов. Вероятность обнаружения системы свободной $W(0) = 0,992$, среднее время ожидания пакета в очереди $T = 5,216 \cdot 10^{-3}$.

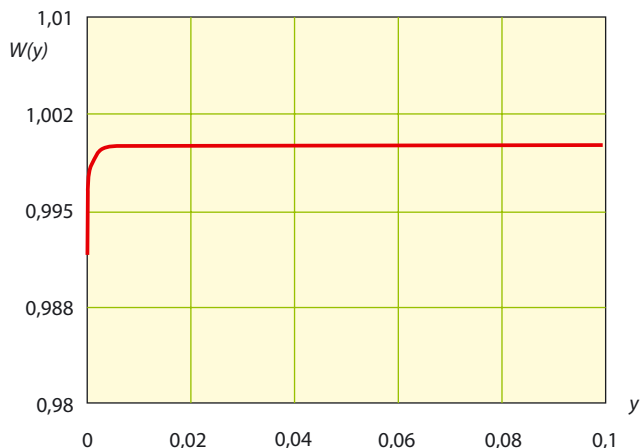


Рис. 4. Интегральная функция распределения времени ожидания $W(y)$ без учета «больших» пакетов

Итак, при обслуживании трафика с бимодальным распределением времени обслуживания пакетов вероятность обнаружения системы свободной значительно ниже, чем при обслуживании трафика с преобладающим числом «малых» пакетов. При этом среднее время ожидания в очереди для трафика с бимодальным распределением времени обслуживания увеличивается на несколько порядков.

Пример 3. В завершение рассмотрим ситуацию, когда среднее время обработки пакета существенно меньше среднего интервала времени между пакетами на входе системы. Здесь $\rho \approx 0,021$. Данная ситуация весьма характерна для реальных ресиверов IPTV.

В качестве аппроксимирующего выражения плотности вероятности интервалов времени между пакетами видеотрафика IPTV воспользуемся формулой (1) с параметрами из примера 1. Выражение для распределения интервалов времени обслуживания первого пика $b_1(\xi)$ видеотрафика IPTV получаем, аппроксимируя плотность вероятности Дагума [4]:

$$f(\xi) = \frac{\alpha k \left(\frac{\xi - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha k - 1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{\xi - \gamma}{\beta} \right)^\alpha \right)^{k+1}},$$

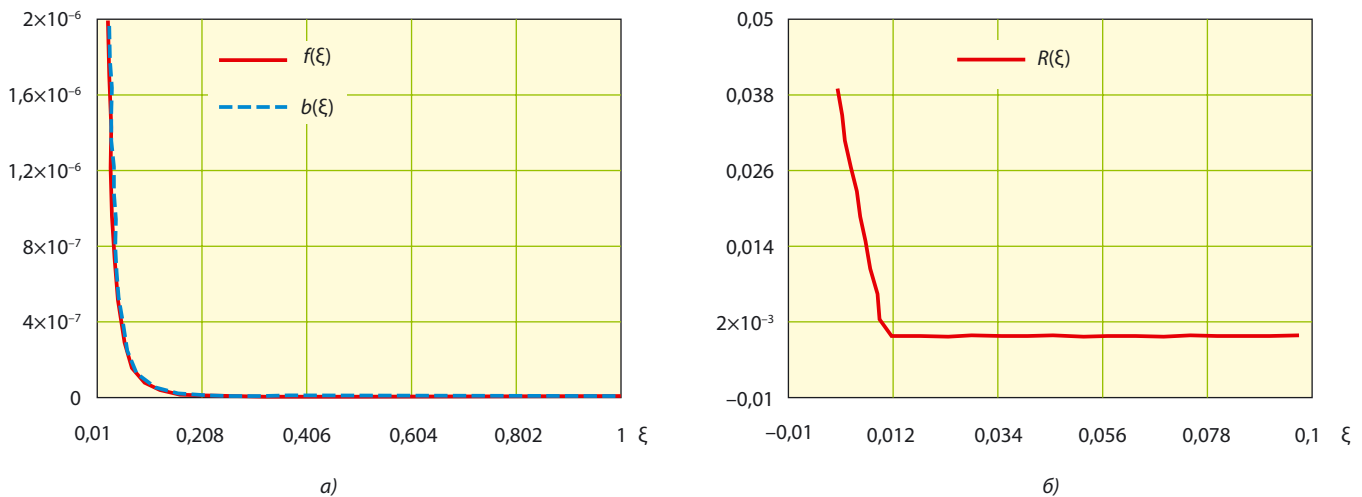


Рис. 5. Плотность вероятности интервалов времени обслуживания видеотрафика IPTV на входе ресивера IPTV (сплошная линия — исходная, пунктир — экспоненциальная) (а) и погрешности вычислений $R(\xi)$ (б)

где $k = 7,4179$; $\alpha = 2,3508$; $\beta = 3,3064 \cdot 10^{-6}$; $\gamma = 0$.

Аппроксимирующее выражение для времени обслуживания видеотрафика IPTV примет вид (2) с коэффициентами $b_1 = 0,5240$; $b_2 = -3,3552$; $b_3 = 22,2058$; $b_4 = -58,6077$; $b_5 = 65,4504$; $\beta_k = \frac{k}{m}$, $m = 0,00046$. Второй пик $b_2(\xi)$ также будем аппроксимировать дельта-функцией в точке $\xi_2 = 0,0001$. Такое значение ξ_2 в сравнении с ξ_2 из примера 1 характеризует высокоскоростной порт ресивера IPTV (100 Мбит/с).

На рис 5, а приведены графики исходной плотности вероятности Дагума и результат аппроксимации суммой затухающих экспонент, на рис. 5, б — абсолютная погрешность аппроксимации $R(\xi)$.

Повторяя приведенную методику расчета, получаем, что $W(y) = 1$ на всей области определения, а среднее время ожидания пакета в очереди $T = 1,322 \cdot 10^{-8}$ соответственно. В данной СМО, представленной ресивером IPTV, пакет обрабатывается в 100 раз быстрее, чем приходит следующий. Таким образом, ресивер IPTV является СМО с минимальным ожиданием даже при обработке мультимедийного трафика с бимодальным распределением времени обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Пер. с англ.— М.: Машиностроение, 1979.— 432 с.
2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями / Пер. с англ. / Под ред. Б. С. Цыбакова.— М.: Мир, 1979.— 600 с.
3. Кокс Д. Теория очередей / Пер. с англ.— М.: Мир, 1966.— 223 с.
4. Буранова М. А., Карташевский В. Г., Самойлов М. С. Сравнительный анализ статистических характеристик видеотрафика в сетях пакетной передачи данных // Инфокоммуникационные технологии.— 2013.— № 4.— С. 33–38.
5. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания / Труды Математического института им. В. А. Стеклова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.— 122 с.
6. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения.— М.: Сов. радио, 1965.— 510 с.
7. Карташевский В. Г. Основы теории массового обслуживания / Учебник для вузов.— М.: Горячая линия-Телеком, 2013 г.— 126 с.
8. Блатов И. А., Карташевский В. Г., Киреева Н. В., Чупахина Л. Р. Метод аппроксимации произвольной плотности распределения суммами экспонент // Вестник ВГУ.— 2013.— № 2.— С. 53–57.
9. IETF RFC 791 Internet Protocol; DARPA internet protocol; Protocol specification.

Получено 28.10.14

ИНФОРМАЦИЯ

МИНКОМСВЯЗЬ РОССИИ УПРОЩАЕТ ВВОД СЕТЕЙ В ЭКСПЛУАТАЦИЮ

С 1 января 2015 г. вступает в силу приказ Министерства связи и массовых коммуникаций Российской Федерации, утверждающий новые требования к порядку ввода сетей электросвязи в эксплуатацию. Реальным послаблением для бизнеса станет возможность ввода в эксплуатацию сетей связи без обязательной экспертизы проектов — в уведомительном порядке.

Данный приказ признает утратившими силу приказы Минкомсвязи России № 113 от 9 сентября 2002 г. и № 146 от 6 ноября 2009 г., в соответствии с которыми для ввода сетей связи в эксплуатацию оператор

должен предоставить большой объем документов и выполнить ряд мероприятий, требующих существенных финансовых затрат. С вводом нового приказа в силу будут снижены административные барьеры для эффективного развития бизнеса операторов связи. При этом наибольший положительный результат от нововведений получат небольшие операторские компании.

Значительно сократится и перечень требуемых документов, таких как заключение государственной экспертизы проекта, документы, подтверждающие подготовку специалистов для работы на оборудовании, а также протоколы по результа-

там испытаний сооружения связи. Приказ впервые четко определяет сроки принятия решений о вводе сети электросвязи в эксплуатацию.

«Мы ведем системную работу по совершенствованию нормативно-правовой базы отечественной отрасли связи, и этот шаг — один из наиболее важных в данном направлении, — отметил глава Минкомсвязи России **Н. Никифоров**. — Мы ожидаем, что введение нового порядка позволит значительно сократить расходы на строительство сетей связи и сроки их ввода в эксплуатацию, особенно в небольших населенных пунктах».