

УДК 621.391.833.64

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНО ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ КООРДИНАТАМИ УЗЛОВ ВРЕМЕННОЙ СЕТКИ

С.В. Поршневу, заведующий кафедрой РЭИС, ИРИТ-РтФ УрФУ, д.т.н.; sergey_porshnev@mail.ru

Д.В. Кусайкин, аспирант УрТИСИ ФГОБУ ВПО СибГУТИ; kusaykin@mail.ru

Обсуждаются результаты исследования методов восстановления дискретных сигналов (ДС), заданных в узлах неравномерной временной сетки с точно неизвестными значениями координат ее узлов, основанные на локальной аппроксимации ДС.

Ключевые слова: неравномерная дискретизация, восстановление сигнала, неизвестные местоположения отсчетов.

Введение. Еще в середине прошлого века преимущественно в зарубежной литературе началось изучение методов восстановления дискретных сигналов (ДС), значения которых заданы в узлах неравномерной временной сетки (в зарубежной литературе non-uniform sampling, irregular sampling) [1]. ДС данного типа используются в телекоммуникациях (в беспроводных широкополосных многоканальных системах передачи [2]); в АЦП и ЦАП (за счет вариации длительности синхронизирующих или тактовых импульсов) [3]; в беспроводных сенсорных сетях (вследствие погрешности данных о расположении датчиков) и т.д.

Постановка задачи. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру ДС $x(t_i) = x_i$, заданного на неравномерной сетке с джиттером

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M_0, \quad (1)$$

где T — период дискретизации; $\tau_i \in (-T/2, T/2)$ — случайная величина, $t_i > t_{i-1}$.

Требуется по набору значений (t_i, x_i) восстановить сигнал $x(t)$ в узлах равномерной временной сетки

$$\eta_m = mT_1, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M_1, \quad (2)$$

где $t_1 \leq \eta_1$.

Возможны две постановки задачи восстановления ДС в узлах временной сетки (2).

Задача 1. Координаты узлов временной сетки (1) точно известны.

Задача 2. Точные значения координат узлов временной сетки (2) неизвестны (например, из-за случайных вариаций частоты дискретизации АЦП — джиттера).

Отметим, что задачи 1 и 2 принципиально отличаются друг от друга. Действительно, задача 1 вне зависимости от равномерности или неравномерности временной сетки при отсутствии аддитивного шума в анализируемом сигнале относится к задаче интерполяции. Описание некоторых методов ее решения для случая восстановления ограниченных по спектру ДС, заданных на неравномерной временной сетке, можно найти в [4–6]. Результаты исследования точности восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки с известными координатами ее узлов с помощью программного инструмента «MATLAB Non-uniform Sampling Toolbox», содержащего MATLAB-функции и реализующие данные методы [7], обсуждаются в [8].

Задача 2 значительно сложнее. Здесь априори можно ожидать, что ранее разработанные методы восстановления сигналов, дискретизированных на неравномерной временной сетке, окажутся неработоспособными. Отметим, что сегодня известен ряд методов восстановления ДС, заданного в узлах с точно неизвестными координатами [9–10]. В основе этих методов лежит априорное предположение о том, что значения координат всех узлов временной сетки (1) являются решением некоторой оптимизационной задачи. При этом можно высказать сомнение в их работоспособности для восстановления реальных сигналов.

Действительно, сложность решения оптимизационной задачи быстро возрастает с увеличением ее размерности. Поэтому в условиях, когда число отсчетов ДС оказывается большим (100 и более), вычислительные затраты становятся неприемлемо велики. Кроме того, нельзя гарантировать нахождение глобального, но не локального максимума решаемой оптимизационной задачи.

В это же время специалистами активно обсуждались методы решения задач регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора [11].

Пусть величины ω_i и x_i связаны между собой соотношениями

$$\omega_i = \eta(x_i, \theta), \quad (3)$$

где $\omega_i \in R$, $\eta(x, \theta)$ — заданная функция аргументов (предикторов) $x \in R^k$, $\theta \in R^m$. Здесь θ — неизвестные параметры, оценки которых могут быть получены по результатам наблюдений, проводимых по схемам активного, либо пассивного экспериментов [12].

Предположим, что задавая значения переменной x_i , измеряем переменную ω_i . Здесь наибольший интерес представляет случай, когда значения x_i не могут быть заданы абсолютно точно, а значения ω_i измеряются с некоторой погрешностью. Тогда данные, получаемые в эксперименте, описываются следующей стохастической моделью:

$$y_i = \omega_i + \varepsilon_i, \quad x_i = u_i + h_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где y_i — результат i -го наблюдения над ω_i ; ε_i — погрешность данного наблюдения (случайная величина), такая, что $E[\varepsilon_i] = 0$ (E — оператор математического ожидания); u_i — условия (режимы), при которых экспериментатор стремился провести i -е измерение; x_i — их действительные значения; h_i — случайные погрешности в фиксации режимов; $E[h_i] = 0$.

Объединяя выражения, получаем модель:

$$y_i = \eta(u_i + h_i) + \varepsilon_i, \quad (5)$$

где h_i, u_i известны экспериментатору, причем u_i — управляемая переменная.

В том случае, когда явное выражение функции $\eta(x, \theta)$ неизвестно (типичная ситуация, возникающая при анализе сигналов, регистрируемых информационно-измерительными системами) [13], предложено проводить аппроксимацию анализируемых экспериментальных данных на локальных отрезках с помощью линейных комбинаций известных базисных функций, т.е. локальную аппроксимацию.

Сравнивая задачи регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора и восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки, можно сделать вывод о сходстве в постановках данных задач. Следовательно, при наличии погрешностей существует потенциальная возможность использования подходов к решению задачи регрессионного анализа экспериментальных данных.

Методы решения задач регрессионного анализа экспериментальных данных при наличии погрешностей в определении предиктора, найденные при целом ряде ограничений, проверить выполнение которых на практике невозможно, описаны в [12–14]. Их анализ показывает, что основное внимание авторов было направлено на получение вычислительных алгоритмов, позволяющих определять оценки параметров стохастических моделей, а не собственно алгоритмов вычисления истинных значений наблюдений, вычисляемых по данным моделям, и их точности. Это не позволяет напрямую применять данные методы в задаче восстановления ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки, однако локальная аппроксимация представляется достаточно конструктивным методом.

Анализ проблемы восстановления сигнала, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными координатами ее узлов. Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в сопоставлении значений сигнала x_i к узлам той или иной временной сетки (например, равномерной) с точно известными координатами ее узлов и далее в применении известных методов интерполяции [15]. Однако, как показано в [8], данный (наиболее очевидный) подход не обеспечивает должной точности восстановления сигнала.

С нашей точки зрения для повышения точности восстановления сигнала $x(t)$ в узлах равномерной временной сетки с неизвестными координатами ее узлов возможно использование следующих подходов:

- определение неизвестных координат отсчетов неравномерно дискретизированного сигнала и далее интерполяция по вычисленным значениям координат узлов исходной временной сетки на равномерную временную сетку;
- отнесение значений сигнала x_i к узлам равномерной временной сетки и их корректировка с учетом характеристик джиттера, например, используя сглаживающие нерекурсивные цифровые фильтры (ЦФ) и т.д.

Ниже приведены результаты исследований алгоритмов восстановления ДС, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат ее узлов, относящихся ко второму из описанных выше подходов.

Ввиду неопределенности точных местоположений отсчетов, отнесение значений сигнала x_i к узлам равномерной временной сетки, означает восстановление сигнала по таблице (iT, x_i) . В данном случае $x_i = \tilde{x}_i + \Delta_i$, где \tilde{x}_i — истинные значения сигнала в узлах равномерной сетки iT ; Δ_i — составляющая ДС, обусловленная незнанием точных координат узлов временной сетки (1).

Типичная зависимость Δ_i от номера отсчета, получаемая при дискретизации гармонического сигнала с безразмерным значением частоты $\hat{f} = 0,2$ в узлах временной сетки (1), где $M_0 = 1000$, τ_i — числа, выбираемые из генеральной совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале $[-0,05; 0,05]$, представлена на рис. 1 (ее гистограмма и автокорреляционная функция (АКФ) приведены на рис. 2 и 3, соответственно); с нормальным законом распределения $N\left(0; \frac{0,1}{3\sqrt{12}}\right)$ — на рис. 4 (гистограмма данной последовательности и ее автокорреляционная функция приведены на рис. 5 и 6, соответственно).

Из рис. 1–6 видно, что последовательность Δ_i вне зависимости от вида функции распределения величины τ_i в (1) являются некоррелированными случайными последовательностями. При этом функции распределения случайных величин Δ_i отличаются от функции распределения случайных величин τ_i . Данный результат можно понять, рассматрив случай $\tau_i \ll T$, для которого

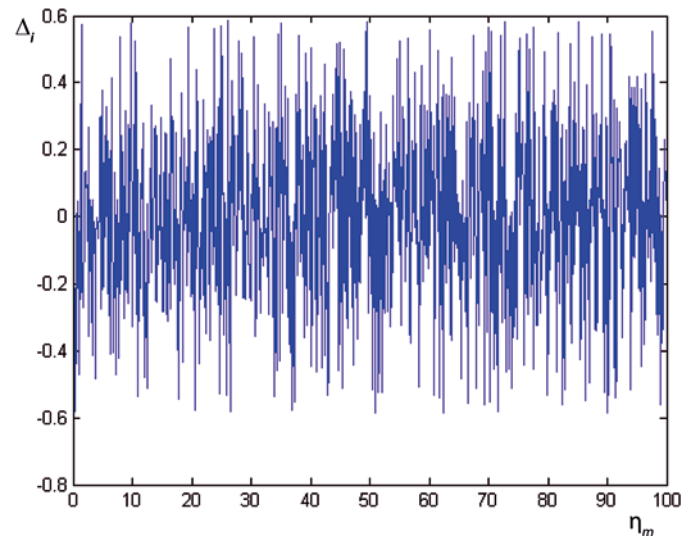


Рис. 1

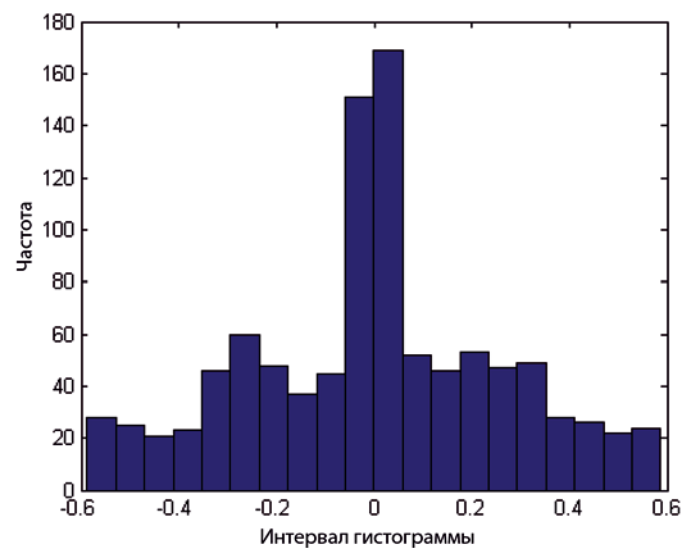


Рис. 2

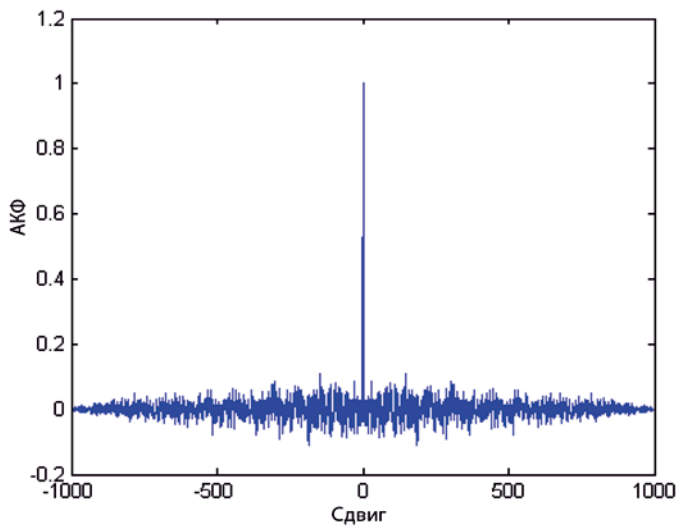


Рис. 3

$$\Delta_i \approx x'(iT)\tau_i \quad (6)$$

т.е. в первом приближении Δ_i есть результат умножения производной дискретизируемого сигнала $x(t)$ в точке iT на случайную величину τ_i .

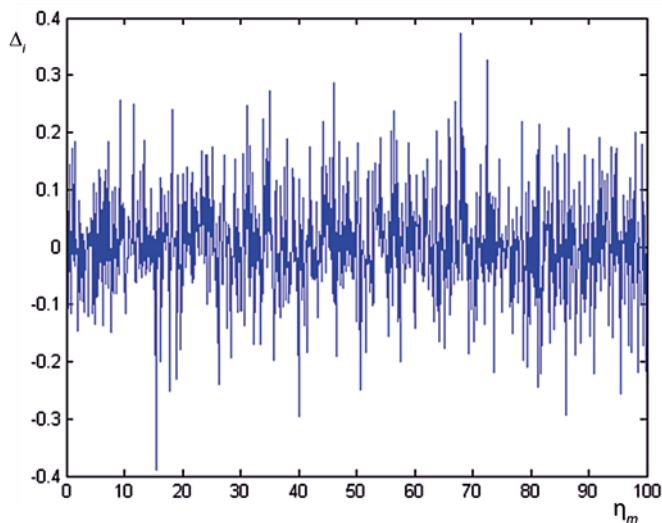


Рис. 4

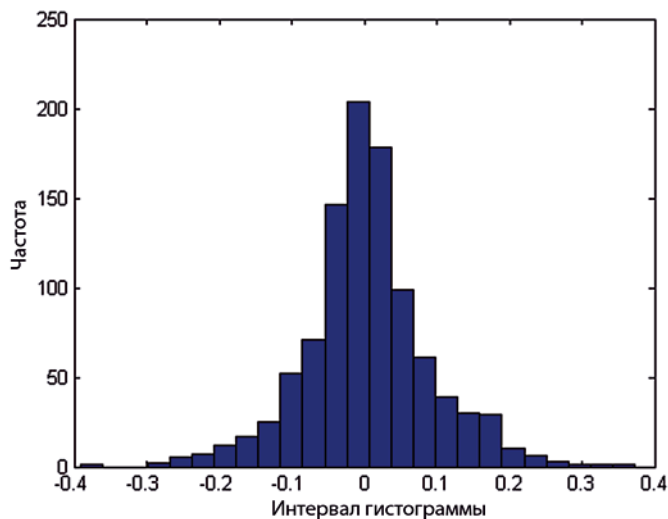


Рис. 5

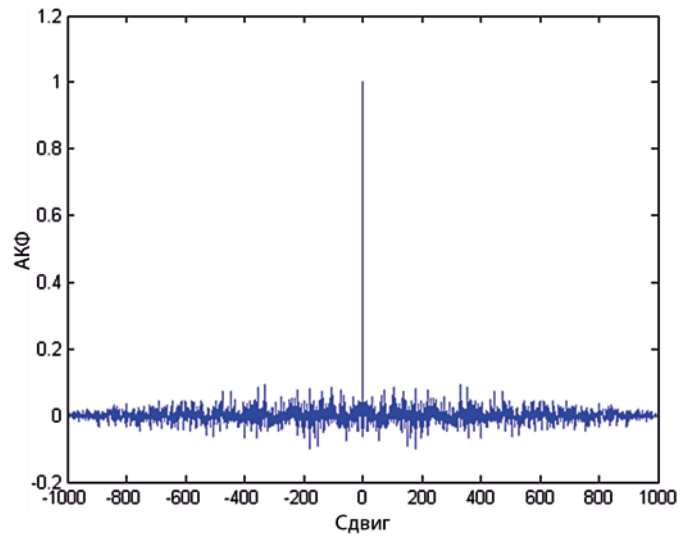


Рис. 6

Таким образом, исходные данные, на основе которых решается задача восстановления ДС, представляют собой аддитивную смесь сигнала $\tilde{x}_i = x(iT)$ и некоррелированного шума Δ_i . Для повышения точности восстановления сигнала по таблице (t, x_i) , где $t = iT, i = 1, 2, 3..M_0$, целесообразно предварить восстановление ДС вычислительными процедурами, позволяющими уменьшить вклад шумовой составляющей Δ_i . Для этого можно использовать нерекурсивный ЦФ, реализующий сглаживание ДС по методу скользящего среднего или методу наименьших квадратов (МНК) — вычисление уточненных значений ДС, как значений полинома степени 2 или выше, аппроксимирующего ДС на локальных отрезках, длительность которых мала в сравнении с длительностью ДС [16].

Методы восстановления ДС, заданного на неравномерной временной сетке (1) с неизвестными координатами узлов, в узлах равномерной временной сетки (2).

Метод восстановления 1.

1. Выбор размера окна сглаживающего ЦФ и степени полинома, аппроксимирующего сигнал.
2. Пропускание сигнала $x(t_i)$ через соответствующий нерекурсивный ЦФ — получение ДС $\tilde{x}(t_i)$.
3. Восстановление сигнала по таблице значений $[t, \tilde{x}(t_i)]$ в узлах равномерной сетки (2) одним из классических интерполяционных способов.

Из приведенного описания метода видно, что точность восстановления изучаемого ДС будет зависеть от вида нерекурсивного ЦФ, размера окна и вида интерполирующего полинома.

Метод восстановления 2.

1. Выбор размера скользящего окна K , на котором будет строиться аппроксимирующий полином.
2. Инициализация счетчика числа шагов: $h = 1 + (K - 1) / 2$.
3. Построение на локальном интервале, содержащем K точек, полинома, аппроксимирующего сигнал в смысле МНК, по таблице $[t(m), x_i(m)]$, где $m = h - \frac{K-1}{2}, h - \frac{K-1}{2} + 1, \dots, h + \frac{K-1}{2}$.
4. Вычисление аппроксимирующего полинома (восстановленных значений сигнала u_m) в узлах равномерной временной сетки (2), принадлежащих отрезку $[t(h) - 0,5T; t(h) + 0,5T]$. При этом в узлах временной сетки $\eta_m \in [t(1), t(1+(K-1)/2)]$ и $\eta_m \in [t(M_0 - (K-1)/2), t(M_0)]$ восстановле-

ние значений сигнала u_m осуществляется путем вычисления аппроксимирующего полинома, построенного в первой и последней локальной области соответственно.

5. Сдвиг скользящего окна — увеличение значения счетчика цикла: $h=h+1$.

6. Если $h \leq M_0 - (K - 1) / 2$, повторение пп. 3–5.

Из приведенного описания видно, что точность восстановления ДС будет зависеть от размера скользящего окна и степени аппроксимирующего полинома.

Анализ результатов исследования точности восстановления ДС, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными координатами ее узлов. Методика проведения исследования. Для оценки точности восстановления исходного сигнала использовано отношение мощности сигнала к мощности ошибки восстановления (Signal-to-Error Ratio — SER):

$$SER = 10 \log \frac{\sum_{i=1}^M x_i^2}{\sum_{i=1}^M (x_i - \hat{x}_i)^2}, \quad (7)$$

где x_i и \hat{x}_i — значения исходного и восстановленного сигналов в узлах равномерной сетки (2).

В проведенных экспериментах в качестве исходного сигнала использовался ДС, определяемый по формуле:

$$y(t_i) = u_i = \sin \left(\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T} \right) \right) + 2 \sin \left(2\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T} \right) \right), \quad (8)$$

где $\hat{f} = f_c T$ — безразмерная частота дискретизации. Поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, то вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta \hat{f}_i \in [-0,5\hat{f}; 0,5\hat{f}]$ представляет собой отсчеты непрерывного сигнала

$$y(t) = \sin(2\pi 0,5 f_c t) + 2 \sin(2\pi f_c t), \quad (9)$$

вычисленные в узлах временной сетки

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = \overline{1, 100}, \quad (10)$$

где T — период дискретизации; $\tau_i \in [-\Delta/2, \Delta/2]$ — случайная величина; $\Delta < T$ — размах джиттера.

В проведенных вычислительных экспериментах использовались следующие параметры ДС:

- число узлов неравномерной временной сетки — 100;
- безразмерная частота дискретизации сигнала $\hat{f} = 0,1$;
- число узлов временной сетки (2) $M = 180$;
- τ_i — случайные числа, генерируемые в соответствии

с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0,1; 0,1]$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с нормальным законом распределения случайной величины (ЗРСВ) с $N \left(0; \frac{0,2}{3\sqrt{12}} \right)$.

Выбор данных параметров законов распределения обеспечивает выполнение критерия $\tau_i \in [-\Delta/2, \Delta/2]$, согласно.

Анализ результатов вычислительных экспериментов.

Значения параметра SER, вычисленные для ДС, восстановленного в соответствии с методом 1, приведены в табл. 1. Здесь использовались следующие типы сглаживающих ЦФ: по методу скользящего среднего; по МНК (полином 2-й степени); по МНК (полином 4-й степени).

Для вычисления значений ДС в узлах равномерной временной сетки (2) применяли кубические сплайны.

Таблица 1

Тип сглаживающего ЦФ	Размер окна ЦФ	Значение SER, дБ	
		Равномерный ЗРСВ τ_i	Нормальный ЗРСВ τ_i
Интерполяция по таблице (iT, x_i) без применения ЦФ	—	16,5±0,4	24,7±0,5
	3	15,2±0,6	17,2±0,2
Методом скользящего среднего	5	9,2±0,3	9,6±0,1
	7	4,8±0,1	5,0±0,1
	9	2,0±0,1	2,0±0,1
	3	16,5±0,4	24,7±0,5
МНК полиномом 2-й степени	5	18,4±0,5	25,3±0,5
	7	17,9±0,7	21,8±0,3
	9	14,6±0,6	16,0±0,2
МНК полиномом 4-й степени	5	16,5±0,4	24,7±0,5
	7	18,2±0,5	25,9±0,5
	9	19,0±0,6	26,0±0,5
	11	19,1±0,7	24,4±0,5

Из табл. 1 видно, что для изученного ДС при равномерном ЗРСВ τ_i наибольшее значение параметра SER достигается в случае использования ЦФ, реализующего сглаживание по МНК полиномом 4-й степени, и размере окна сглаживания, равного 11, при нормальном ЗРСВ τ_i — 9. При использовании сглаживающего ЦФ, реализующего сглаживание ДС по методу скользящего среднего, наибольшее значение SER достигается при размере окна сглаживания, равном 3, вне зависимости от вида ЗРСВ τ_i . Отметим, что значение SER в последнем случае меньше соответствующего значения без использования данного вида фильтра. Следовательно, его применение нецелесообразно.

В то же время использование ЦФ, реализующего сглаживание по МНК, позволяет повысить точность восстановления ДС. Для равномерного ЗРСВ τ_i без применения

Таблица 2

Степень аппроксимирующего полинома	Размер локальной области	Значение SER, дБ (равномерный ЗРСВ τ_i)	Размер локальной области	Значение SER, дБ (нормальный ЗРСВ τ_i)
Вторая	3	16,1±0,4	3	23,1±0,4
	5	18,1±0,4	5	22,9±0,4
	7	17,5±0,5	7	20,0±0,3
	9	14,3±0,4	9	15,3±0,2
Третья	5	17,5±0,3	5	23,9±0,5
	7	18,1±0,3	7	22,4±0,5
	9	15,3±0,3	9	17,0±0,2
	11	10,7±0,2	11	11,3±0,1
Четвертая	5	16,0±0,3	5	23,1±0,4
	7	17,8±0,3	7	24,0±0,4
	9	18,8±0,4	9	24,1±0,4
	11	18,9±0,4	11	23,1±0,4

ЦФ $SER = 16,5 \pm 0,4$, но при использовании ЦФ (полином 4-й степени, размер окна сглаживания — 11) $SER = 19,1 \pm 0,7$. Для нормального ЗРСВ τ_i без ЦФ значение $SER = 24,7 \pm 0,5$ и при ЦФ (полином 4-й степени, размер окна сглаживания — 9) $SER = 26,0 \pm 0,5$ по отношению к интерполяции по таблице (iT, x_i) без применения ЦФ.

Значения параметра SER, вычисленные для ДС, восстановленного в соответствии с методом 2, приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что для рассматриваемого ДС при равномерном ЗРСВ τ_i наибольшее значение параметра SER достигается при аппроксимации ДС в соответствии с МНК полиномом 4-й степени при размере локальной области в 11 точек, а при нормальном ЗРСВ τ_i — 9 точек. При этом точность восстановления ДС методом 2 оказывается ниже аналогичной величины метода 1. Объяснение полученных результатов с теоретической точки зрения представлено ниже.

Обоснование результатов вычислительных экспериментов. Рассмотрим особенности использования методов 1 и 2 на примере восстановления ДС, представляющего собой отсчеты периодической функции вида

$$x_i = \sin(2\pi f_0 t_i), \quad (11)$$

вычисленные в узлах временной сетки (1).

Как было показано выше, данный ДС представляет собой смесь истинных значений и некоррелированного шума, обусловленного незнанием точных координат временной сетки (1). Как известно [16], действие ЦФ на смесь сигнала

и некоррелированного шума оказывается двояким. С одной стороны, ЦФ уменьшает энергию шумовой составляющей Δ_i :

$$(E_{\Delta})_f = E_{\Delta} \sum_{k=1}^N c_k^2,$$

где $(E_{\Delta})_f$ — энергия шума на выходе ЦФ; E_{Δ} — энергия шума на входе ЦФ; N — размер окна сглаживания; c_k — коэффициенты ЦФ. Это приводит к уменьшению погрешности значений ДС в узлах интерполяции.

С другой стороны, ЦФ изменяет амплитуду полезной составляющей ДС \tilde{x}_i . (Указанное воздействие описывают с помощью амплитудно-частотной характеристики ЦФ $H(K)$, зависящей от частоты дискретизации ДС, размера окна сглаживания и вида локальной аппроксимации сигнала.) Это, в свою очередь, ведет к увеличению погрешности значений ДС в узлах интерполяции. Следовательно, для каждого конкретного сигнала существует некоторый оптимальный размер окна сглаживания, обеспечивающий минимальную погрешность восстановления ДС в узлах равномерной временной сетки.

Для иллюстрации проведенных выше рассуждений на рис. 7, а — в представлены количественные показатели результата применения ЦФ (метод 1), реализующего сглаживание по методу скользящего среднего, и по МНК полиномом 2-й и 4-й степени, соответственно.

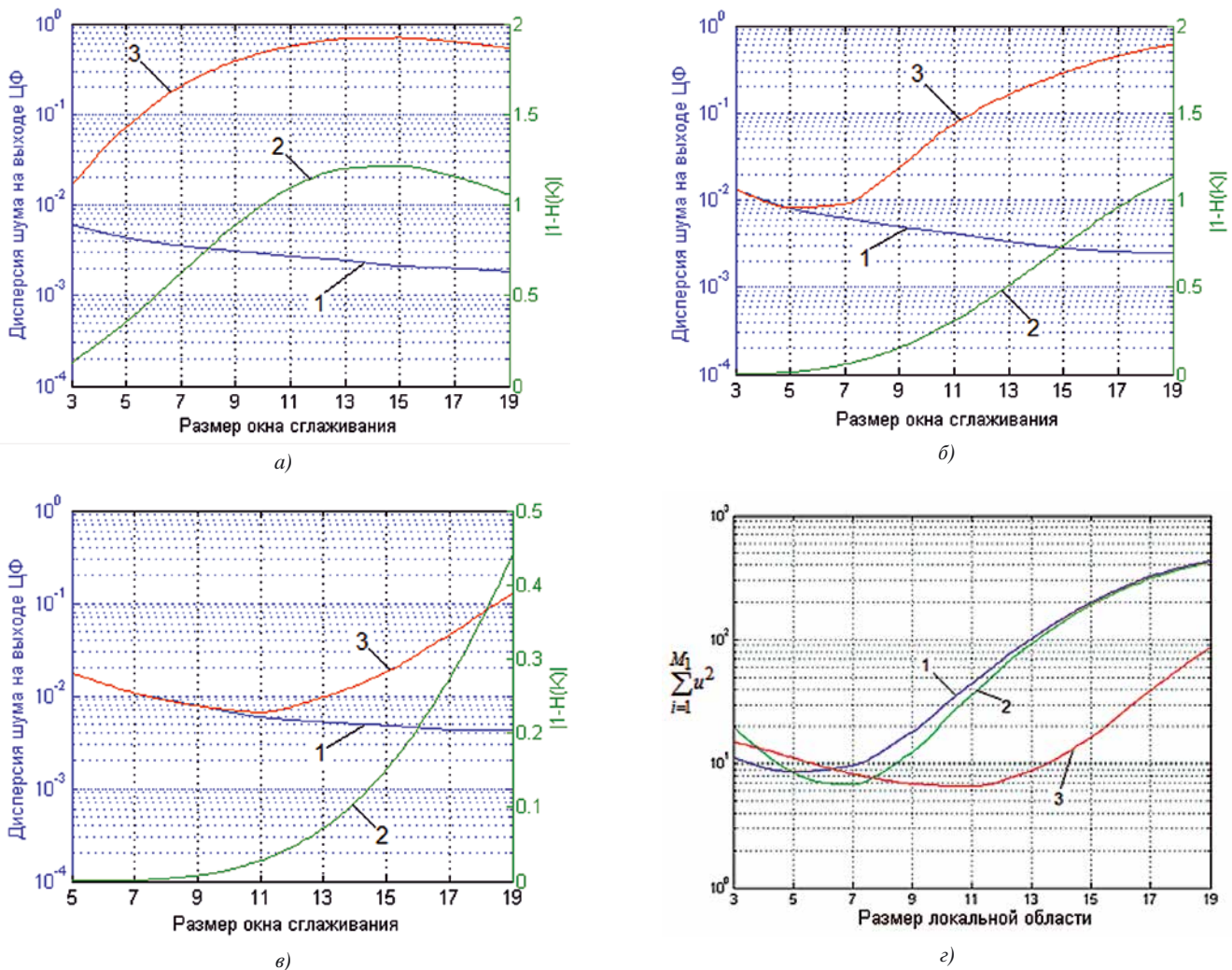


Рис. 7

На рисунках приведены зависимости: дисперсии шума на выходе фильтра (кривая 1); модуля разности между амплитудами детерминированной составляющей ДС на входе и выходе ЦФ (кривая 2) и величины SER (кривая 3) от размера окна сглаживания, вычисленные для гармонического сигнала с безразмерным значением частоты $f = 0,1$ в узлах временной сетки (1), где $M_0 = 1000$, τ_i — числа, выбираемые из генеральной совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале $[-0,1; 0,1]$.

На примере восстановления ДС (11) дадим объяснение результатам, полученным с помощью метода 2, основанного на использовании аппроксимации ДС на упорядоченных во времени локальных отрезках длительности, малой в сравнении с длительностью анализируемого ДС в соответствии с МНК. Точность восстановления ДС будет зависеть от размера локальной области, на которой проводится построение аппроксимирующего полинома и его порядка. При этом можно ожидать, что увеличение размера областей локальной аппроксимации приведет к уменьшению погрешности коэффициентов аппроксимирующих моделей, вычисляемых в соответствии с МНК, и, следовательно, к снижению погрешности значений восстанавливаемого ДС.

Однако дальнейшее возрастание размера окна аппроксимации будет приводить к увеличению отличий между аппроксимирующим полиномом и восстанавливаемым ДС. Следовательно, можно ожидать, что для каждой из степеней аппроксимирующих полиномов существует оптимальный размер локальных областей, в которых при аппроксимации погрешность восстановления ДС будет минимальной.

В этой связи были определены зависимости энергии остатков аппроксимационных моделей (суммы квадратов разностей $\sum_{i=1}^{M_1} u^2$ между точными значениями ДС (6) и аппроксимирующего полинома) от размера локальной области аппроксимации для полиномов 2, 3 и 4-го порядков. ДС (6) задавался с безразмерным значением частоты $f = 0,1$ в узлах временной сетки, где $M_0 = 1000$, τ_i — числа, выбираемые из генеральной совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале $[-0,1; 0,1]$, и далее восстанавливался в узлах равномерной временной сетки (2).

Зависимости представлены на рис. 7, *г* (полином 2-й степени — кривая 1, полином 3-й степени — кривая 2 и 4-й степени — кривая 3). Из рисунка видно, что зависимости $\sum_{i=1}^{M_1} u^2$ от размера локальной области для каждого из рассмотренных полиномов имеют локальный минимум, значение абсциссы которого зависит от степени аппроксимирующего полинома: для полиномов 2-й, 3-й и 4-й степени оно равняется 5, 7 и 11 точкам, соответственно. Таким образом, полученные результаты объясняют данные моделирования, представленные в табл. 2.

Заключение. Представленные методы, основанные на отнесении значений анализируемого ДС к узлам соответствующей временной сетки и далее уменьшении с помощью скользящего сглаживания или локальной аппроксимации по МНК случайной составляющей ДС позволяют повысить качество восстановления ДС. Анализ точности восстановления ДС данного типа показывает, что результаты, достигнутые с помощью метода 1, оказываются выше аналогичной величины, получаемой методом 2.

Предложенный подход к восстановлению ДС, заданного в узлах неравномерной временной сетки с неизвестными

координатами узлов, в известной мере, универсален, однако выбор размера окна сглаживания, вида ЦФ или степени аппроксимирующего полинома для иных типов сигналов требует проведения аналогичных исследований.

Работа выполнена в рамках договора № 02.G25.31.0055 (проект 2012–218–03–167) при финансовой поддержке работ Министерством образования и науки Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Unser M. Sampling — 50 years after Shannon // Proceedings of the IEEE.— 2000.— Vol. 88, № 4.— P. 569–587.
2. Ahmad B. I. Applications of nonuniform sampling in wideband multi-channel communication systems / PhD thesis, University of Westminster, School of Electronics and Computer Science.— 2011.— P.180.
3. Divi V., Wornell G. Signal recovery in time-interleaved analog-to-digital converters / Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.— 2004.— P. 593–596.
4. Feichtinger H. G., Grochenig K., Strohmer T. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory // Numerische Mathematik.— 1995.— № 69.— P. 423–440.
5. Senay S. Signal reconstruction from nonuniform samples using prolate spheroidal wave functions: theory and application: Doctoral Dissertation, Pittsburgh.— 2011.— P.117.
6. Selva J. Functionally weighted Lagrange interpolation of band-limited signals from nonuniform samples // IEEE Transactions on Signal Processing.— 2009.— Vol. 57, № 1.— P.168–181.
7. Поршнев С. В., Кусайкин Д. В. MATLAB Non-uniform Sampling Toolbox / Свид-во о госуд. регистрации программ для ЭВМ № 20136115162 (Заявка № 2013612641. Дата поступления 01 апреля 2013 г. Дата регистрации в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2013 г.).
8. Поршнев С. В., Кусайкин Д. В. Исследование точности методов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке // В мире научных открытий.— 2013.— Т. 46, № 10.— С. 261–279.
9. Browning J. A method of finding unknown continuous-time nonuniform sample locations of band-limited functions / Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations XIV. Edited by Luk, Franklin T. Proceedings of the SPIE.— 2004.— Vol. 5559.— P. 289–296.
10. Marziliano P., Vetterli M. Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations // IEEE Transactions on Signal Processing.— 2000.— Vol. 48, № 12.— P. 3462–3471.
11. Бородюк В. П., Вошинин А. П. Ошибки регистрации независимых переменных в задачах множественной регрессии // Заводская лаб.— 1973.— Т. 39.— С. 831–835.
12. Федоров В. В. Регрессионный анализ при наличии погрешностей в определении предиктора / В кн.: Вопросы кибернетики.— М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР.— 1978.— Вып.47.— С. 69–75.
13. Катковник В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации.— М.: Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1985.— 336 с.
14. Жилинская Е. И., Товмаченко Н. Л., Федоров В. В. Методы регрессионного анализа при наличии ошибок в предикторных переменных.— М.: ВИНТИ.— 1979.
15. Половко А. М., Бутусов П. Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации.— СПб.: БХВ-Петербург, 2004.— 320 с.
16. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры.— М.: Недра, 1987.— 221 с.

Получено 22.10.14