УДК 519.64

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИНДЛИ ПРИ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

И.А. Блатов, заведующий кафедрой ВМ ПГУТИ, д.ф-м.н.
В.Г. Карташевский, заведующий кафедрой МСИБ ПГУТИ, д.т.н.; kartash@psati.ru
Н.И. Козырева, старший преподаватель кафедры МСИБ ПГУТИ

Ключевые слова: *средняя длина очереди, размер буфера, интегральное уравнение Линдли, метод Гаусса-Кристоффеля.*

Введение. В процессе проектирования, запуска и эксплуатации информационных телекоммуникационных сетей одной из основных проблем является обеспечение качества обслуживания (QoS) при обработке потока данных (заданных уровней задержек, потерь и пр.), т.е. трафика. Необходимое QoS в сети не может быть обеспечено только методами построения оптимального маршрута передачи данных. Помимо этого требуются эффективные протоколы и алгоритмы управления классами, очередями и потоками в устройствах коммутации трафика.

Образование очередей происходит в случае, когда интерфейс занят, например, интенсивность поступления пакетов становится больше интенсивности их обслуживания. Если же интерфейс свободен, то пакеты передаются без всякой дополнительной обработки. Все стандартные очереди работают по принципу FIFO и если очередь заполнена, но приходят новые пакеты, то происходит «отброс хвоста» [1]. Основные параметры очереди характеризуются свойствами входящего потока требований, потока обслуживания и дисциплины очереди.

Для предотвращения потерь пакетов при кратковременном многократном превышении среднего значения интенсивности трафика единственным средством служит буфер большого объема. Чем больше объем памяти буфера, тем менее вероятны потери пакетов при перегрузках.

Методы ТМО. Для определения таких параметров узла мультисервисной сети, как интенсивность поступления пакетов, интенсивность обслуживания пакетов, среднее время ожидания пакетов в очереди, длина очереди и коэффициент загрузки сети, необходимо представить узел сети Интернет-провайдера в виде системы массового обслуживания (СМО).

Будем придерживаться классификации, предложенной в [2], в соответствии с которой система обозначений СМО имеет вид A/B/C. Здесь A – обозначение закона распределения вероятностей для интервалов поступления пакетов, B – закона распределения времени обслуживания, C – число каналов обслуживания.

Спектральный метод решения интегрального уравнения (ИУ) Линдли. Для аналитического определения средней длины очереди и других параметров произвольной СМО (G/G/1) необходимо решить уравнение Линдли

$$F(x)=\int_0^{\infty} K(x-y)dF(y), \tag{1}$$

где F – функция распределения времени ожидания требования в очереди; K – функция распределения разности между длительностью обслуживания требования и интервалом времени между поступлениями соседних требований.

Согласно методу, приведенному в [3], уравнение (1) можно решить с помощью спектрального разложения. Его цель состоит в том, чтобы для выражения

$$A(-s)B(s)-1$$

найти подходящее представление в виде:

$$A(-s)B(s)-1=\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)},$$

где $A(s)$ и $B(s)$ – преобразование Лапласа плотности распределения промежутков времени между поступлениями пакетов и плотности распределения времени обслуживания, соответственно. Так, для СМО типа M/M/1 (пуассоновский входной поток и экспоненциальное распределение времени обслуживания):

$$A(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda} \quad \text{и} \quad B(s)=\frac{\mu}{s+\mu},$$

где λ и μ – интенсивности поступления пакетов и обслуживания, соответственно.

Таким образом, для системы M/M/1:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)-1=\frac{s(s+\mu-\lambda)}{(\lambda-s)(s+\mu)}.$$

Учитывая, что функция $\Psi_+(s)$ должна быть аналитической и не иметь нулей в области Re(s)>0, включим в нее множители, дающие два нуля (s=0 и $s=-\mu+\lambda$) и один полюс ($s=-\mu$). Точно так же функция $\Psi_-(s)$ должна быть аналитической и не иметь нулей в области Re(s)<D при некотором D>0. Тогда

$$\Psi_+(s)=\frac{s(s+\mu-\lambda)}{s+\mu}; \quad \Psi_-(s)=\lambda-s.$$

Произведя действия, описанные в [3], определим, что выражение для преобразования Лапласа функции распределения времени ожидания имеет вид:

$$\Psi_+(s)=\frac{(1-\rho)(s+\mu)}{s(s+\mu-\lambda)}.$$

Эта же функция может быть получена через обратное преобразование Лапласа:

$$F(x)=1-\rho\,\mathrm{e}^{-\mu(1-\rho)x},\ x\geq 0. \tag{2}$$

Применение метода Гаусса-Кристоффеля для решения ИУ Линдли. Вводя плотность распределения $f(x)=F'(x)$, преобразуем уравнение (1) к виду:

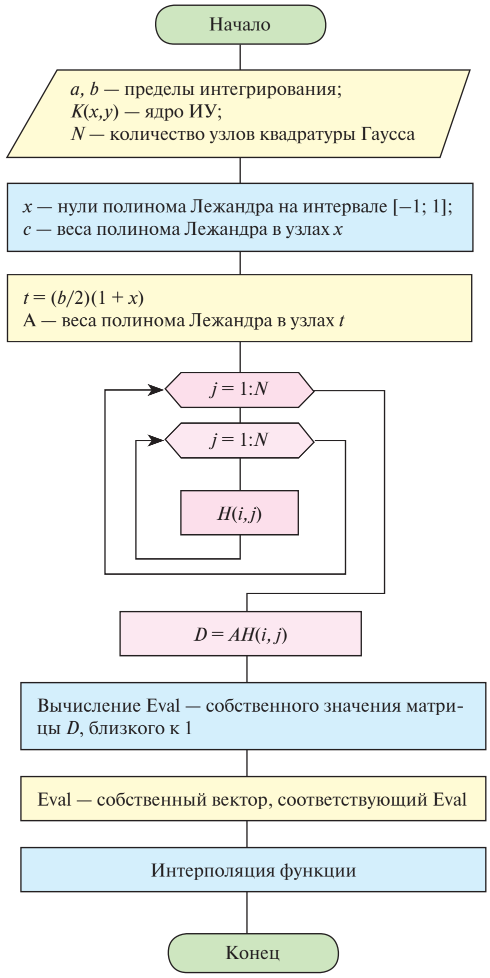

Рис. 1. **Блок-схема алгоритма численного решения уравнения Линдли**

$$f(x)=\int_0^{\infty}\tilde{K}(x-y)f(y)dy, \tag{3}$$

где $\tilde{K}(x)=K'(x)$. Переходя к операторным обозначениям [4], уравнение (3) перепишем как

$$(\tilde{K}f)(x)=\int_0^{\infty}\tilde{K}(x-y)f(y)dy,$$

и рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\tilde{K}$:

$$\tilde{K}f=\lambda f. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) сводится к отысканию собственной функции $f(x)$ оператора $\tilde{K}$, соответствующей собственному значению λ=1. Пусть b – достаточно большое положительное число. Рассмотрим наряду с (4) задачу

$$\tilde{K}_b f_b=\lambda_b f, \tag{5}$$

где $(\tilde{K}_b f)(x)=\int_0^{b}\tilde{K}(x-y)f(y)dy.$

В предположении достаточно быстрого убывания решения уравнения (3) на бесконечности методами [4 и 5] нетрудно доказать, что найдется совокупность собственных чисел λ_b и собственных функций $f_b(x)$, таких, что $\lambda_b \to 1$,

$$\int_0^{b}\left|f_b(x)-f(x)\right|^2 dx\to 0 \text{ при } b\to\infty.$$

Таким образом, приближенное отыскание решения уравнения (1) свелось к приближенному нахождению собственных чисел λ_b, близких к единице, и соответствующих им собственных функций $f_b(x)$.

Для решения этой задачи аппроксимируем интеграл в (3) квадратурной формулой. В качестве основы для алгоритма решения уравнения можно взять метод Гаусса-Кристоффеля, основанный на применении квадратурных формул Гаусса [6], выбор которых предпочтительнее, поскольку они являются формулами наивысшего алгебраического порядка точности.

Суть метода заключается в замене интеграла конечной суммой по формуле

$$J(\varphi)=\int_0^b \varphi(x)dx \approx S_m(\varphi)=\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi(x_j^m),$$

где c_j – веса; x_j – узлы; m – степень полинома $\varphi(x_j^m)$, используемого для интерполяции подынтегрального выражения. Имеем равенство

$$J(\varphi)=S_m(\varphi)+R_m(\varphi),$$

где $R_m(\varphi)$ – остаточный член аппроксимации квадратурной формулой.

Таким образом, решение уравнения (1) сводится к определению собственных значений для однородной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} c_j K(x_i,x_j) f(x_j)=\lambda f(x_i), \quad i=1, ..., m. \tag{6}$$

В силу принципа компактной аппроксимации [7], при фиксированном b собственные числа задачи (6) и соответствующие им собственные векторы сходятся при $m\to\infty$ к собственным числам задачи (5) и векторам, компоненты которых совпадают со значениями соответствующей собственной функции в узлах квадратурной формулы.

Алгоритм реализации метода Гаусса-Кристоффеля для решения ИУ Линдли. Рассмотрим систему M/M/1. Известно [8], что $K(x)$ определяется выражением

$$K(x)=\int_0^\infty V(x+z)dU(z)=\int_0^\infty V(x+z)u(z)dz,$$

где $V(x)$ – распределение длительности обслуживания; $U(z)$ – распределение интервалов времени между поступлениями требований на обслуживание.

Тогда, для системы M/M/1 функция $K(x)$ будет иметь вид:

$$K(x)=1-\frac{\lambda e^{-\mu x}}{\lambda+\mu}=1-\frac{\rho e^{-\mu x}}{1+\rho}.$$

Определим узлы и веса квадратуры Гаусса. Узлы квадратуры Гаусса располагаются в корнях полинома Лежандра степени N [6]. Так, если $P_N(x)$ – полином Лежандра, то x_k – корни полинома, определенные на отрезке [–1, 1], т. е. табличные узлы квадратуры Гаусса, а $c_k=\dfrac{2}{(1-x_k)^2(P_N(x_k))^2}$ – табличные веса квадратуры Гаусса.

Существуют таблицы узлов и весов квадратуры Гаусса для значений N от 1 до 512. Приведенные в таблицах справочной литературы данные рассчитаны для отрезка [–1, 1]. При этом предполагается, что интегрирование производится по табличному отрезку. При реализации вычислений нужно искать интеграл на отрезке [0, b]. В таком случае при использовании табличных значений узлов и весов путем замены переменной осуществляется переход от переменной $x\in[-1,`1]$ к переменной $t\in[0,b]$:

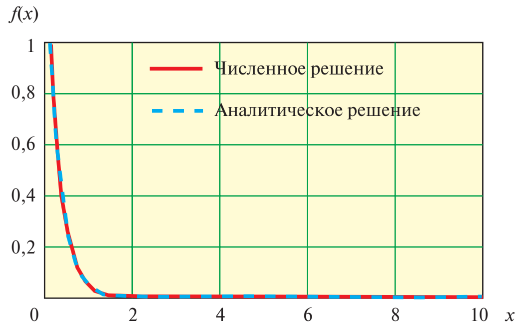

Рис. 2. **Графики функций распределения времени ожидания в СМО M/M/1**

$$t=\frac{b}{2}(1+x).$$

Затем определяются $A(i)$ — веса полинома Лежандра в узлах t.

Следующий этап реализации алгоритма – нахождение $H(i,j)$ — значений ядра $K(x–y)$ в узлах $t(i)$ и $i(j)$ при $i=[1:N]$, $j=[1:N]$. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1

Далее согласно алгоритму вычисляется собственный вектор, соответствующий ближайшему к единице собственному значению. Интерполяция функции, совпадающей в узлах квадратурной формулы с компонентами этого вектора, после интегрирования дает приближенное решение уравнения Линдли.

Сравнительный анализ результатов, полученных для СМО типа M/M/1. Используя описанный выше алгоритм численного решения, определим интегральную функцию распределения времени ожидания для СМО M/M/1 с параметрами $\rho=0{,}5$ и $\mu=7$ с$^{-1}$ при N=128 и b=10. Так же для выбранных параметров построим график изменения плотности вероятности функции (2). Результаты представлены на рис. 2.

Заключение. Как видно из рис. 2, функция плотности вероятности, полученная аналитически, совпадает с функцией, реализованной численным методом квадратур. Это подтверждает точность метода Гаусса-Кристоффеля даже при небольшом количестве узлов квадратур.

Таким образом, можно считать целесообразным применение предложенного метода для исследования СМО типа G/G/1 при произвольных распределениях интервалов времени обслуживания заявок и интервалов времени между поступлениями заявок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов С.Н.** Основы телетрафика мультисервисных сетей. – М.: Эко-Трендз, 2010. – 392 с.
2. **Башарин Г.П.** Модели информационно-вычислительных систем. – М.: Наука, 1993. – 156 с.
3. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. **Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др.** Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
5. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
6. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
7. **Вайникко Г.М.** Компактная аппроксимация и приближеннное решение уравнений. – Тарту: Изд-во Тартусского ун-та, 1970. – 192 с.
8. **Кокс Д., Смит У.** Теория очередей. – М.: Мир, 1966. – 220 с.

Получено 23.10.12