

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ

М. В. Савельева, научный сотрудник Военной академии Ракетных войск стратегического назначения (ВА РВСН), к.т.н.; marina-savelieva-62@mail.ru
В. А. Сивов, старший научный сотрудник ВА РВСН, к.т.н.

Ключевые слова: *весовая функция, оконная функция, «окно» Кайзера, боковой лепесток, основной лепесток.*

Введение. Достижения в микроэлектронике и цифровой технике открыли дополнительные возможности в области совершенствования обработки сигналов в системах сотовой, беспроводной связи, телевидения и радиосвязи, терминалах космических навигационных систем и в других областях радиотехники. Поскольку сегодня продолжается переход на технологии 3G, 4G и даже 5G, требования к качеству фильтрации сигналов неуклонно возрастают.

Основным содержанием процесса обработки сигналов является оценивание спектральной плотности мощности дискретизированного процесса (на определенном интервале времени) для принятия решения о наличии сигнала и оценки его параметров.

В частотной области сигнал описывается бесконечным рядом Фурье. Руководствуясь теоремой Котельникова, при цифровой обработке сигнала можно ограничиться конечным числом членов ряда Фурье. Усечение ряда Фурье эквивалентно обработке спектра сигнала фильтром нижних частот с прямоугольной характеристикой. Преобразование Фурье (ПФ) фильтра во временной области описывается функцией $\sin(x)/x$, реализация которой так же может быть определена конечным числом членов разложения, что эквивалентно усечению ее посредством весовой функции в виде прямоугольного «окна».

При обработке сигнала с ограничением его составляющих амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра искажается в виде затухающих гармонических колебаний в полосах пропускания и непропускания, т.е. имеет место так называемое явление Гиббса [1]. В связи с этим были предприняты попытки обработки сигнала путем предварительного взвешивания его отсчетов — формирования весовых («оконных») функций с целью уменьшения (сглаживания) искажений АЧХ фильтра.

Основная цель модификации весовой функции. К настоящему времени известны несколько видов «оконных» функций: Капеллини [1], Ганна, Хемминга [2], Хеннинга, Блекмана, Кайзера [3], прямоугольная, треугольная [4] и др. Наиболее интересными из них являются «оконные» функции Хемминга и Кайзера, характеризующиеся низким уровнем боковых лепестков (БЛ) в полосе непропускания АЧХ фильтра (-60 дБ и менее) и убывающие по величине по мере удаления от основного лепестка. Увеличение степени подавления БЛ сопровождается расширением основного лепестка за счет возрастания переходной полосы фильтра.

Можно перераспределить энергию, приходящуюся на БЛ АЧХ фильтра, приблизительно поровну так, чтобы общий уровень БЛ выровнялся по отношению к исходному на заданном уровне. Тогда энергия, приходящаяся на основной лепесток АЧХ фильтра, несколько уменьшится (ширина основного лепестка станет меньше). Если сможем найти такую весовую функцию, то очевидно, что при одинаковой степени подавления БЛ, основной лепесток соответствующей

АЧХ фильтра по сравнению с АЧХ указанных выше весовых функций будет расширен в меньшей степени.

Целесообразно искать весовую функцию среди известных весовых функций с последующей ее модификацией. В качестве подходящего экземпляра для дальнейшей модификации была выбрана весовая функция Кайзера — «окно» Кайзера [3]:

$$W(\tau) = \frac{I_0(\omega_\alpha T \sqrt{1-\tau^2})}{I_0(\omega_\alpha T)}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad -1 \leq \tau \leq 1,$$

где T — интервал наблюдения; t — текущее время; ω_α — параметр, задающий уровень БЛ «оконной» функции (положительное число); $I_0(\omega_\alpha T)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. «Окно» Кайзера имеет единственный параметр $\omega_\alpha T$, численное значение которого определяет уровень БЛ в полосе непропускания фильтра.

Определение модифицированной весовой функции (МВФ). Для решения проблемы выравнивания уровней БЛ в АЧХ фильтра, соответствующего «окну» Кайзера, необходимо ввести дополнительный параметр, обозначив его символом α . Также для упрощения численных расчетов заменим функцию $I_0(x)$ функцией гиперболического косинуса $ch(x)$ из-за схожести графиков этих функций, имеющих вид гипербол, приподнятых по оси ординат на единицу. Тогда МВФ примет вид:

$$W(\tau) = \frac{ch[\omega_\alpha T(1-\tau^2)^\alpha]}{ch(\omega_\alpha T)}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad -1 \leq \tau \leq 1.$$

Введя параметр $\beta = \omega_\alpha T$, получим

$$W(\tau) = \frac{ch[\beta(1-\tau^2)^\alpha]}{ch(\beta)}. \quad (1)$$

Выполним преобразование Фурье этого выражения:

$$W(\omega) = \int_{-1}^1 \frac{ch[\beta(1-\tau^2)^\alpha]}{ch(\beta)} \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (2)$$

Разлагая в числителе (2) функцию гиперболического косинуса в ряд и выполняя ПФ с учетом соответствующих выражений из [5], окончательно получим:

$$W(\omega) = \frac{1}{ch(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} B\left(\frac{1}{2}, 2\alpha n + 1\right) \times \\ \times \Phi[2\alpha n + 1, 2(2\alpha n + 1); 2j\omega] e^{-j\omega},$$

где $B\left(\frac{1}{2}, 2\alpha n + 1\right)$ — Бэта-функция;

$\Phi[2\alpha n + 1, 2(2\alpha n + 1); 2j\omega]$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При этом

$$B\left(\frac{1}{2}, 2cn + 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{2^k k!} \frac{1}{2cn + 1 + k};$$

$$\Phi(a, b; z) = 1 + \frac{a z^1}{b 1!} + \frac{a(a+1) z^2}{b(b+1) 2!} +$$

$$+ \frac{a(a+1)(a+2) z^3}{b(b+1)(b+2) 3!} + \dots;$$

где $a = 2cn + 1$; $b = 2(2cn + 1)$; $z = 2j\omega$.

Полученная функция сложна для расчетов, поскольку Бэта-функция и вырожденная гипергеометрическая функция аналитически представляются в виде сумм бесконечных членов некоторого ряда. Значительно проще выполнить дискретное преобразование Фурье.

Для определения зависимости параметров α и β МВФ от уровня боковых лепестков $U_{БЛ}$ были рассчитаны и построены графики АЧХ фильтра с практически одинаковыми уровнями БЛ для следующих значений модуля БЛ: $U_{БЛ} \in \{-40; 50; 60; 70; 80; 90; 100\}$ дБ.

Как оказалось, зависимость функции $\beta(U_{БЛ})$ носит линейный характер, тогда как функции $\alpha(U_{БЛ})$ — нелинейный. Коэффициенты графиков линейной и нелинейной зависимости параметров указанных функций оценивались методом наименьших квадратов. При этом определяли параметры нелинейной зависимости функции, обратной параметру α , т.е. функции $Y(U_{БЛ}) = 1/\alpha$. Аппроксимация зависимости $Y(U_{БЛ})$ производилась отдельно полиномами второй и четвертой степени (последний обеспечивает более высокую точность аппроксимации расчетных значений). Ниже приведены выражения аппроксимирующих функций:

$$\beta = 0,916 \left(\frac{U_{БЛ} - 70}{10} \right) + 6,021;$$

$$Y = (-2,29 \cdot 10^{-2}) \left(\frac{U_{БЛ} - 70}{10} \right)^2 + 1,514 \text{ или}$$

$$Y = 5,4927 \cdot 10^{-4} \left(\frac{U_{БЛ} - 70}{10} \right)^4 -$$

$$- 2,81859 \cdot 10^{-2} \left(\frac{U_{БЛ} - 70}{10} \right)^2 + 1,519221.$$

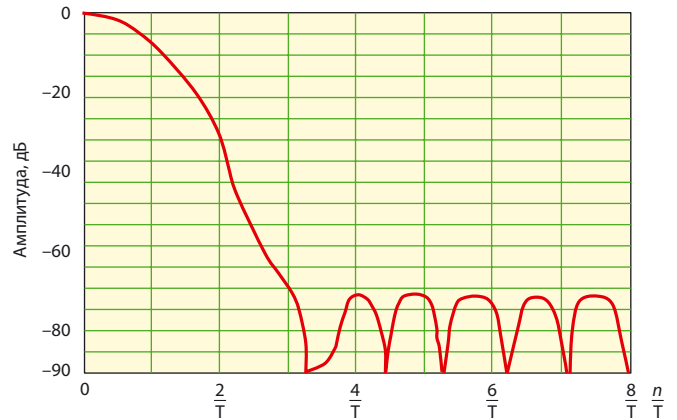
Основные параметры β , Y для различных значений уровня БЛ фильтра и относительное расширение δf его полосы пропускания Δf_{MF} на уровне 3 дБ к полосе пропускания $\Delta f_{S/X}$ фильтра, соответствующего «оконной» функции

$$W(\tau) = \frac{\sin(\tau)}{\tau},$$

приведены в таблице.

Параметры	Уровень БЛ U , дБ						
	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100
β	3,273	4,189	5,105	6,021	6,937	7,853	8,769
Y	1,31	1,415	1,491	1,52	1,491	1,415	1,31
$\delta f_1 = \frac{\Delta f_{MF}}{\Delta f_{S/X}}$	1,32	1,41	1,504	1,6	1,695	1,78	1,87
D_{MF}	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,4	4,9
D_K	2,23	2,93	3,63	4,32	5,02	5,71	6,41

На рисунке представлен график АЧХ фильтра, соответствующего МВФ, с уровнем БЛ $U = -70$ дБ при следующих параметрах: $\beta = 6,1$; $Y = 1/\alpha = 1,52$; $\alpha \approx 0,658$. Из аналогич-



ных графиков, рассчитанных для величин БЛ из диапазона от -100 до -40 дБ, было установлено, что:

- ширина основного лепестка D на уровне боковых выбросов соотносится с абсолютной величиной БЛ $U_{БЛ}$, выраженной в децибелах, как:

$$D_{MF} = \frac{U_{БЛ} - 2}{20},$$

где D_{MF} — ширина основного лепестка на уровне БЛ (четвертая строка в таблице);

- приведенные для сравнения в пятой строке таблицы значения D_k для фильтра, соответствующего «окну» Кайзера [2], т.е. значения $D_k = (U_{БЛ} - 7,95) / 14,36$ на $(17-30)\%$ шире соответствующих значений D_{MF} фильтра с МВФ, а именно $D_k = 1,393D_{MF} - 0,414$;

- расширение основного лепестка на уровне 3 дБ по отношению к ширине полосы функции $\sin(x)/x$ возрастает в зависимости от степени подавления БЛ на величину $0,0917$, приходящуюся на декаду (третья строка таблицы).

Таким образом, предложенная весовая функция (1) имеет определенные преимущества по отношению к весовой функции Кайзера относительно как уровня БЛ (равенство уровней БЛ), так и ширины переходной полосы, которая на $(17-30)\%$ уже, чем у фильтров с весовой функции Кайзера.

Заключение. Предложенная весовая функция для цифровой фильтрации сигналов создана на основе модификации весовой функции Кайзера. По сравнению с известным методом Кайзера, полученные характеристики модифицированного метода цифровой фильтрации сигналов позволяют: улучшить отношение сигнал/шум на входе схем принятия решений; повысить точность оценивания фазы и задержки сигналов; увеличить надежность приема информации и эффективность подавления помех; повысить помехозащищенность и эффективность функционирования информационных систем в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каппелини В., Константинович А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ. / Под ред. Н.Н. Слепова.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— 360 с.
2. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры.— М.: Недра, 1987.— 219 с.
3. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов.— М.: Советское радио, 1973.— 308 с.
4. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник.— М.: Радио и связь, 1985.— 312 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.