

## МИНИМИЗАЦИЯ СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОРАЖЕНИЯ БЛОКА В ДИСКРЕТНОМ КАНАЛЕ

**Н.В. Лямин**, магистрант СибГУТИ

**Д.В. Клейко**, магистрант СибГУТИ

**О.Г. Мелентьев**, профессор СибГУТИ, д.т.н.; sibsutispds@gmail.com

*Ключевые слова:* вероятность поражения блока, количество операций, Марковская цепь, вектор состояний.

**Введение.** В адаптивных системах передачи данных вне зависимости от применяемой модели канала возникает необходимость расчета вероятности возникновения  $m$  ошибок в блоке длиной  $n$  элементов (далее  $P(m,n)$ ). Различные методики вычисления  $P(m,n)$  для случая, когда канал описывается простой Марковской цепью или моделью Гилберта, рассмотрены в [3, 4, 7, 8]. В [5] приводится обзор существующих алгоритмов, а также результаты сравнения методик по параметрам погрешности и вычислительных затрат. Как и для любого метода расчета, соотношение сложность вычисления – точность играет основную роль и будет использовано в работе при сравнении полученных выражений с существующими.

В большинстве систем, применяющих помехоустойчивое кодирование (где авторам в явном виде представляется область использования вычислений  $P(m,n)$ ), исправляющая способность кодов не превышает десяти на блок. Так, например, в стандарте DVB-T используется код Рида-Соломона с исправляющей способностью, равной восьми байтовым ошибкам [9].

Рассмотрим систему с гибридной решающей обратной связью, использующую коды Рида-Соломона. Для расчета вероятности успешной доставки сообщений необходимо вычислить вероятность исправления ошибок в блоке  $P_{ii}$  [6]. Поскольку исправление возможно только при условии, что общее количество ошибок в блоке не превышает исправляющей способности кода  $t$ , то определение вероятности исправления ошибок требует вычисления вероятности ошибок кратности до  $t$ . Иными словами,

$$P_{ii} = \sum_{m=1}^t P(m,n).$$

К примеру, код Рида-Соломона (44, 40) исправляет две ошибки, поэтому вероятность исправления ошибок складывается из вероятностей однократной  $P(1,n)$  и двукратной  $P(2,n)$  ошибок.

На основании вышеизложенного, в статье предлагаются точные выражения вычисления вероятности поражения блока для случая, когда количество ошибок варьируется от одной до семи (длина блока при этом не ограничена), а модель канала описывается простой Марковской цепью. Также описан общий подход получения подобных выражений, использующий рекурсию.

**Постановка задачи.** Пусть имеется исходный дискретный канал, описываемый Марковской цепью с двумя состояниями и известной матрицей переходных вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} P_{gg} & P_{gb} \\ P_{bg} & P_{bb} \end{pmatrix}.$$

Финальные вероятности состояний канала определяются известными выражениями:

$P_g = \frac{P_{bg}}{P_{bg} + P_{gb}}$  – финальная вероятность хорошего состояния (G);

$P_b = \frac{P_{gb}}{P_{bg} + P_{gb}}$  – финальная вероятность плохого состояния (B).

При передаче блока длиной  $n$  элементов по каналу с группированием ошибок возможна многократная смена состояния канала. При фиксированной величине ошибок  $m$  количество их возможных комбинаций определяется как число сочетаний из  $n$  по  $m$ . В отличие от канала с независимыми ошибками, в данном случае каждая комбинация будет характеризоваться собственной вероятностью. Таким образом, искомая величина  $P(m,n)$  представляет сумму вероятностей всех комбинаций длины  $n$  и веса  $m$ .

Определим сначала вероятность  $P(1,5)$ , затем получим обобщенное выражение для случая с одной ошибкой. Всего возможных комбинаций  $C_5^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$ . В таблице приведены все возможные комбинации ошибок заданной кратности и соответствующие им вероятности. Вероятности, соответствующие комбинациям ошибок, определяются финальными и переходными вероятностями простой Марковской цепи.

Как видно из таблицы, вероятности только двух комбинаций отличаются между собой, остальные – одинаковы. В таком случае выражение для общего случая примет вид:

$$P(1,n) = P_b P_{bg} P_{gg}^{n-2} + P_g P_{gb} P_{gg}^{n-2} + (n-2) P_g P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-3}. \quad (1)$$

Нетрудно показать, что  $P_b P_{bg} = P_g P_{gb}$ . Тогда

$$P(1,n) = P_b P_{bg} P_{gg}^{n-3} (2P_{gg} + (n-2)P_{bg}).$$

При двукратном поражении блока конечное выражение можно определить аналогичным способом:

$$\begin{aligned} P(2,n) &= P_b P_{bb} P_{bg} P_{gg}^{n-3} + P_b P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-3} + (n-3) P_b P_{bg}^2 P_{gb} P_{gg}^{n-4} + \\ &+ P_g P_{gg}^{n-3} P_{gb} P_{bb} + (n-3) P_g P_{gb}^2 P_{bg} P_{gg}^{n-4} + \\ &+ (n-3) P_g P_{bg} P_{bb} P_{bg} P_{gg}^{n-4} + \frac{n^2 - 7n + 12}{2} P_g P_{gb}^2 P_{bg}^2 P_{gg}^{n-5} = \\ &= 2P_b P_{bg} P_{bb} P_{gg}^{n-3} + P_b P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-3} + 2(n-3) P_b P_{bg}^2 P_{gb} P_{gg}^{n-4} + \\ &+ (n-3) P_b P_{bg} P_{bb} P_{bg} P_{gg}^{n-4} + \frac{n^2 - 7n + 12}{2} P_b P_{gb} P_{bg}^3 P_{gg}^{n-5} = \\ &= P_b P_{bg} P_{gg}^{n-5} \left( \frac{P_{gg}^2 (2P_{bb} + P_{gb}) + (n-3) P_{gg} P_{bg} (2P_{gb} + P_{bb})}{2} + \frac{n^2 - 7n + 12}{2} P_{gb} P_{bg}^2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) последовательно показаны все замены, приведение подобных и вынесение общих множителей. Ниже остановимся только на итоговых результатах.

На примере первичных (без упрощений и преобразований) выражений для случаев  $P(4,n)$  (3) и  $P(5,n)$  (5) покажем общие рекуррентные закономерности, позволяющие полу-

чить выражения для произвольного значения  $m$ . Отметим, что общие рекуррентные закономерности проявляются для всех вероятностей, начиная с  $m=3$ :

$$\begin{aligned}
 P(4, n) = & P_b P_{bb}^3 P_{bg} P_{gg}^{n-5} + 3(n-5) P_b P_{bb}^2 P_{bg}^2 P_{gb} P_{gg}^{n-6} + \\
 & + 3 P_b P_{bb}^2 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-5} + 3 \left( \sum_{i=0}^{n-6} i \right) P_b P_{bb} P_{bg}^3 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 3(n-5) P_b P_{bb} P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-6} + 1 \left( \sum_{j=1}^{n-7} \sum_{i=0}^j i \right) P_b P_{bb}^4 P_{bg}^3 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-8} + \\
 & + 1 \left( \sum_{i=0}^{n-6} i \right) P_b P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-7} + (n-5) P_g P_{bb}^3 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-6} + \\
 & + 3 \left( \sum_{i=0}^{n-6} i \right) P_g P_{bb}^2 P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-7} + 3(n-5) P_g P_{bb}^2 P_{bg} P_{gb}^2 P_{gg}^{n-6} + \\
 & + 3 \left( \sum_{j=1}^{n-7} \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb} P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-8} + 3 \left( \sum_{i=0}^{n-6} i \right) P_g P_{bb} P_{bg}^2 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 1 \left( \sum_{t=1}^{n-8} \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb}^4 P_{bg}^4 P_{gb}^4 P_{gg}^{n-9} + 1 \left( \sum_{j=1}^{n-7} \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb}^3 P_{bg}^4 P_{gb}^4 P_{gg}^{n-8} + \\
 & + P_g P_{bb}^3 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-5}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Поскольку механизм получения выражений  $P(m, n)$  является рекуррентным, предполагается, что известно выражение для случая  $P(m, n)$ , и требуется найти формулу для следующего значения —  $P(m+1, n)$ . Ниже приводится алгоритм внесения модификаций в выражение  $P(m, n)$ . Алгоритм построен таким образом, что для получения выражения важен исходный порядок следования слагаемых (аналогичен приведенному в (3), (5)), а также их сквозная нумерация от 1 до  $k(m)$ , где  $k(m)$  — порядковый номер последнего слагаемого. Так, в примере для  $P(4, n)$  15 слагаемых ( $k(4)=15$ ), которые нумеруются по порядку.

Рассмотрим модифицирование этих слагаемых, для чего введем промежуточное значение  $P^{int}(4, n)$  (шаги алгоритма 1–4), а затем для получения итогового выражения  $P(5, n)$  добавим еще четыре слагаемых (шаги алгоритма 5–10). Некоторые группы слагаемых претерпевают одинаковые изменения, поэтому для наглядности представления шаги с  $l$ -го по 4-й обозначены различными цветами в (4), а с 5-го по 10-й — в (5).

1. **Красный.** Во всех слагаемых  $P(m, n)$  степень при  $P_{bb}$  возрастает, а при  $P_{gg}$  уменьшается на единицу.

2. **Зеленый.** В слагаемых с множителем вида  $(n-m-1)$  множитель меняется на  $[n-(m+1)-1]$ , а их числовые коэффициенты (перечислены по порядку расположения в выражении) преобразуются в  $[(m+1)-1]$ ,  $\sum_{i=1}^{(m+1)-2} i$ , 1,  $[(m+1)-1]$ .

3. **Серый.** Числовой коэффициент при третьем слагаемом определяется как  $[(m+1)-1]$ .

Состояние	Комбинация ошибок	Вероятность комбинации ошибок
1	10000	$P_b P_{bg} P_{gg} P_{gg} P_{gg}$
2	01000	$P_g P_{gb} P_{bg} P_{gg} P_{gg}$
3	00100	$P_g P_{gg} P_{gb} P_{bg} P_{gg}$
4	00010	$P_g P_{gg} P_{gg} P_{gb} P_{bg}$
5	00001	$P_g P_{gg} P_{gg} P_{gg} P_{gb}$

4. Пункт посвящен модификации слагаемых, где в качестве коэффициента присутствует сумма по одному или нескольким параметрам.

4.1. **Синий.** Верхний предел суммы всех слагаемых уменьшается на единицу.

4.2. **Коричневый.** Числовые коэффициенты для слагаемых с номерами 4;  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m)}{2} \right\rfloor + 3 \right]$  и  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m)}{2} \right\rfloor + 4 \right]$  изменяются на  $\sum_{i=1}^{(m+1)-2} i$ . Для слагаемого с номером  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m)}{2} \right\rfloor + 1 \right]$  применяется числовой коэффициент  $-(m+1)-1$ .

4.3. **Фиолетовый.** Коэффициенты пар последовательно расположенных слагаемых, следующих с 5-го до  $\left\lfloor \frac{k(m)}{2} \right\rfloor$ -го и с  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m)}{2} \right\rfloor + 5 \right]$ -го до  $k(m)$  элемента, меняются попарно. Например, в (5) для 6-го–7-го или 15-го–16-го слагаемых числовые коэффициенты равны. Причем, числовые коэффициенты таких пар для выражения  $P(m+1, n)$  получаются из  $P(m, n)$  путем сложения коэффициентов искомой и предыдущей пар. Коэффициенты для начальных пар, следующих после 5-го и  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m)}{2} \right\rfloor + 5 \right]$ -го слагаемых, образуются аналогично. Но вместо коэффициента предыдущей пары берется коэффициент ближайшего предыдущего элемента, содержащего сумму:

$$\begin{aligned}
 P^{int}(4, n) = & P_b P_{bb}^4 P_{bg} P_{gg}^{n-6} + 4(n-6) P_b P_{bb}^3 P_{bg}^2 P_{gb} P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 4 P_b P_{bb}^3 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-6} + 6 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_b P_{bb}^2 P_{bg}^3 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-8} + \\
 & + 6(n-6) P_b P_{bb}^2 P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-7} + 4 \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^j i \right) P_b P_{bb} P_{bg}^4 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-9} + \\
 & + 4 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_b P_{bb} P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-8} + (n-6) P_g P_{bb}^4 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 4 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_g P_{bb}^3 P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-8} + 4(n-6) P_g P_{bb}^3 P_{bg} P_{gb}^2 P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 6 \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb}^2 P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-9} + 6 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_g P_{bb}^2 P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-8} + \\
 & + 4 \left( \sum_{t=1}^{n-9} \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb} P_{bg}^4 P_{gb}^4 P_{gg}^{n-10} + 4 \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb} P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-9} + \\
 & + P_g P_{bb}^4 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-6}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

5. Количество слагаемых для последующего выражения  $P(m+1, n)$  увеличивается на 4, т.е.  $k(m+1) = k(m) + 4$ .

6. Порядковые номера четырех добавляемых слагаемых:  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m+1)}{2} \right\rfloor - 1 \right]$ ,  $\left[ \left\lfloor \frac{k(m+1)}{2} \right\rfloor \right]$ ,  $(k(m+1)-2)$  и  $(k(m+1)-1)$ , соответственно.

7. **Темно-зеленый.** Вероятностные составляющие для каждого из добавляемых слагаемых принимают вид:  $(P_b P_{bg}^{m+1} P_{gb}^{(m+1)-1} P_{gg}^{n-2(m+1)})$ ,  $(P_b P_{bg}^{(m+1)-1} P_{gb}^{(m+1)-1} P_{gg}^{n-2(m+1)+1})$ ,  $(P_b P_{bg}^{m+1} P_{gb}^{m+1} P_{gg}^{n-2(m+1)-1})$  и  $(P_b P_{bg}^{(m+1)-1} P_{gb}^{m+1} P_{gg}^{n-2(m+1)})$ , соответственно.

8. **Розовый.** Коэффициенты всех слагаемых будут включать сумму по нескольким параметрам вида  $\sum_{y=1}^X \dots \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^j i$ , где  $X$  — верхний предел суммы;  $M$  — количество операторов суммирования.

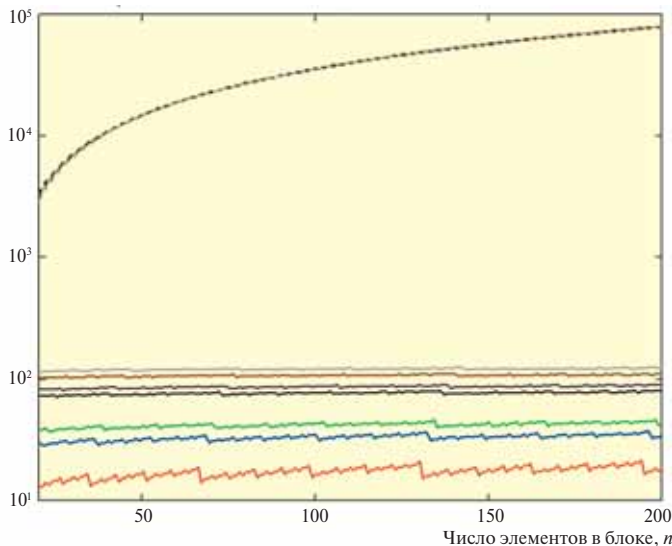
9. **Голубой.** Пределы суммы  $X$  для каждого из добавляемых слагаемых:  $[n+1-2(m+1)]$ ,  $[n+2-2(m+1)]$ ,  $[n-2(m+1)]$  и  $[n+1-2(m+1)]$ , соответственно.

10. Количество операторов суммирования  $M$  для каждого из добавляемых слагаемых:  $[(m+1)-2]$ ,  $[(m+1)-3]$ ,  $[(m+1)-1]$  и  $[(m+1)-2]$ , соответственно.

$$\begin{aligned}
 P(5, n) = & P_b P_{bb}^4 P_{bg} P_{gg}^{n-6} + 4(n-6) P_b P_{bb}^3 P_{bg}^2 P_{gb} P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 4 P_b P_{bb}^3 P_{bg} P_{gb} P_{gg}^{n-6} + 6 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_b P_{bb}^2 P_{bg}^3 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-8} + \\
 & + 6(n-6) P_b P_{bb}^2 P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-7} + 4 \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_b P_{bb} P_{bg}^4 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-9} + \\
 & + 4 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_b P_{bb} P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-8} + \left( \sum_{i=1}^{n-9} \sum_{j=1}^i \sum_{l=0}^j i \right) P_b P_{bb}^5 P_{bg}^4 P_{gb}^{n-10} + \\
 & + \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_b P_{bb}^4 P_{bg}^4 P_{gb}^{n-9} + (n-6) P_b P_{bb}^4 P_{bg} P_{gb}^4 P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 4 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_g P_{bb}^3 P_{bg}^2 P_{gb}^2 P_{gg}^{n-8} + 4(n-6) P_g P_{bb}^3 P_{bg} P_{gb}^2 P_{gg}^{n-7} + \\
 & + 6 \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb}^2 P_{bg}^3 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-9} + 6 \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_g P_{bb}^2 P_{bg}^2 P_{gb}^3 P_{gg}^{n-8} + \\
 & + 4 \left( \sum_{i=1}^{n-9} \sum_{j=1}^i \sum_{l=0}^j i \right) P_g P_{bb} P_{bg}^4 P_{gb}^4 P_{gg}^{n-10} + 4 \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_g P_{bb} P_{bg}^3 P_{gb}^4 P_{gg}^{n-9} + \\
 & + \left( \sum_{i=1}^{n-10} \sum_{l=1}^i \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^j i \right) P_g P_{bb}^5 P_{bg}^5 P_{gb}^{n-11} + \left( \sum_{i=1}^{n-9} \sum_{j=1}^i \sum_{l=0}^j i \right) P_g P_{bb}^4 P_{bg}^5 P_{gb}^{n-10} + \\
 & + P_g P_{bb}^4 P_{bg} P_{gb}^{n-6}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Таким образом, используя вышеприведенный алгоритм, можно рекуррентно получать выражение для любого требуемого  $P(m, n)$ . Однако подобные выражения достаточно громоздки, поэтому разумно провести упрощения, как показано в (2). После преобразований выражения становятся более компактными для записи, а их вычисление требует меньше арифметических операций. Ниже показаны преобразованные выражения (6), (7) для определения вероятности нахождения в блоке длиной  $n$  элементов для случаев трех и пяти ошибок. Аналогичным преобразованиям подвергаются выражения для  $m$  любой кратности.

Количество арифметических операций



Зависимость количества арифметических операций для различных  $n$  при использовании математических выражений (—  $P(1, n)$ ; —  $P(2, n)$ ; —  $P(3, n)$ ; —  $P(4, n)$ ; —  $P(5, n)$ ; —  $P(6, n)$ ; —  $P(7, n)$ ) и упрощенной методики (---  $P(1, n)$ ; ---  $P(2, n)$ ; ---  $P(3, n)$ ; ---  $P(4, n)$ ; ---  $P(5, n)$ ; ---  $P(6, n)$ ; ---  $P(7, n)$ )

$$P(3, n) = P_b P_{bg} P_{gg}^{n-7} \left( \left( P_{bb} + P_{gb} \right) \left( 2 P_{bb} P_{gg}^3 + 2 \left( \sum_{i=0}^{n-5} i \right) P_{bg} P_{gg}^2 P_{gg} \right) + \right. \\
 \left. + (n-4) P_{bb} P_{bg} P_{gg}^2 (4 P_{gb} + P_{bb}) + \left( \sum_{j=1}^{n-6} \sum_{i=0}^j i \right) P_{gb}^2 P_{gg}^3 \right); \tag{6}$$

$$P(5, n) = P_b P_{bg} P_{gg}^{n-11} \left( \left( P_{bb}^2 P_{gg}^4 (2 P_{bb} P_{gg} (P_{bb} + 2 P_{gb}) + \right. \right. \\
 \left. \left. + (n-6) P_{bg} (8 P_{bb} P_{gb} + 6 P_{gb}^2 + P_{bb}^2)) + \left( \sum_{i=0}^{n-7} i \right) P_{bb} P_{gg} (P_{bb} + P_{gb})^2 + P_{bb} P_{gb} \right) + \right. \\
 \left. + P_{bg}^2 P_{gb} P_{gg}^2 \left( \sum_{j=1}^{n-8} \sum_{i=0}^j i \right) P_{bg} P_{gb} (8 P_{bb} P_{gb} + P_{gb}^2 + 6 P_{bb}^2) \right) + \\
 \left. + P_{bg}^4 P_{gb}^3 \left( 2 \left( \sum_{i=1}^{n-9} \sum_{j=1}^i \sum_{l=0}^j i \right) P_{gg} (P_{gb} + 2 P_{bb}) + \left( \sum_{l=1}^{n-10} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^j i \right) P_{bg} P_{gb} \right) \right); \tag{7}$$

**Оценка точности и сложности вычисления вероятности  $m$ -кратной ошибки в блоке длиной  $n$  элементов.** Проверку корректности полученных выражений проводили путем сравнения с существующими методиками. Для этого вероятность  $m$ -кратной ошибки в блоке длиной  $n$  элементов рассчитывали как по полученным выражениям (1)–(3), (5)–(7), так и матричным методом [5, 7]. Длина блока изменялась в интервале от 10 до 100, а кратность ошибки от 1 до 8. Результаты, полученные по (1)–(3), (5)–(7) и матричным методом, полностью совпадают. В этом контексте решающим фактором эффективности методики становится вычислительная сложность алгоритма. Для объективного сравнения затрат вычислительных ресурсов необходимо выбрать критерии, количественно характеризующие затраты и не зависящие от быстродействия процессора и оптимальности алгоритмов.

Выберем в качестве таких величин количество операций сложения, умножения и обращения к массиву, необходимых для вычисления одного значения вероятности  $P(m, n)$ , и проведем их оценку. Ниже представлены результаты для выражений (1)–(3), (5)–(7) и упрощенной методики [5], в которой учтены возвращения плохого состояния на длине блока. Отметим, что упрощенная методика имеет погрешности по отношению к точному матричному методу, но требует меньше арифметических операций, чем остальные.

Примем следующие положения:

- операция вычитания эквивалентна операции сложения;
- операция деления эквивалентна операции умножения;
- число операций умножения, необходимых для возведения в степень, будем определять по алгоритму Аль-Коши [1]:

$$x^n \rightarrow \log_2(n) + W(n),$$

где  $W(n)$  – вес двоичного представления числа  $n$ .

Отметим, что для вычисления выражений (1)–(3), (5)–(7) предполагается использовать предварительно посчитанную справочную таблицу (Look up Table), в которой хранятся вы-

численные значения сумм вида  $\sum_{y=1}^X \dots \sum_{j=1}^i \sum_{i=0}^j i$ , где  $j$ -й столбец массива определяет предел суммы  $X$ , а  $i$ -я строка – количество операторов суммирования  $M$ . Поэтому при вычислении  $P(m, n)$  требуется лишь обратиться к массиву с корректными номерами столбцов и строк для чего нужна только одна операция. В случае, если  $n$  фиксировано, вместо массива необходим лишь вектор длиной  $m-1$  элементов.

Используя вышеприведенные соглашения, авторами были определены вычислительные затраты в операциях на нахождение значений  $P(m, n)$  при вариации  $m$  от 1 до 7 как по выражениям (1)–(3), (5)–(7), так и по упрощенной методике [5], при числе учитываемых возвращений, равном 7. На рисунке приведены зависимости затрат операций при  $n$ , изменяющемся от 20 до 200. Из графиков можно сделать вывод о существенном преимуществе выражений (1)–(3), (5)–(7) над упрощенной методикой.

**Заключение.** Полученные выражения для количественной оценки вероятности возникновения  $m$  ошибок в блоке длиной  $n$  элементов позволяют проводить в адаптивных системах точную оценку при приемлемых затратах арифметических операций. Это позволяет обоснованно выбирать внутренние параметры системы, обеспечивающие заданные качественные показатели передачи. Отметим и недостаток предложенного подхода. При нахождении ошибок большей кратности, чем предложено в выражениях (1)–(3), (5)–(7), необходимо продолжить поиск рекурсивных выражений в соответствии с изложенной идеологией, а для матричного метода [3] достаточно изменить входные данные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кнут Д.** Искусство программирования на ЭВМ. – М.: Мир., 1977. – Т. 2. – 724 с.
2. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
3. **Самойленко С.И.** Статистика ошибок при передаче цифровой информации. – М.: Мир, 1966.
4. **Elliott E.O.** Telephone switched line model for data transmission // Bell System Technishe Jornal. – 1965. – XLIV. – P. 89–110.
5. **Мелентьев О.Г.** Теоретические аспекты передачи данных по каналам с группирующимися ошибками / Под ред. проф. В.П. Шувалова. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 253 с.
6. **Лямин Н.В., Клейко Д.В., Шапин А.Г.** Математическая модель системы с гибридной решающей обратной связью, использующей коды Рида–Соломона // Научный вестник СибГУТИ. – 2011. – № 4. – С. 32 – 40.
7. **Мелентьев О.Г., Зеленцов Б.П.** Вычисление вероятностей состояний для дискретного канала, описываемого моделью Гилберта / Деп. в ВИНТИ №304-В 2003 от 17.02.2003.
8. **Мелентьев О.Г., Аль-Касабех Басиль.** Оптимизация алгоритма расчета вероятности появления ошибки кратности  $m$  при длине блока  $n$ -элементов в дискретном канале, описываемом моделью Гилберта / Деп. в ВИНТИ №102-В 2001 от 15.01.01.
9. ETSI. Digital broadcasting systems for television, sound and data services; Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television. – European Telecommunication Standard ETS 300 744. – 1997.

Получено 17.10.2012